DUE DATE

Rare

Cl. No. 513 / 168F55

Acc. No. C 11952

Late Fine Ordinary books **25 p.** per day, Text Book **Re 1** per day, Over night book **Re 1** per day.

سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

علم ہندسہ

(سکول جامٹری، حصہ پنجم ہال اینڈ سٹیونز)

برائے ایف، اے

مترجمہ

قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے

پروفیسر ریاضی عثمانیہ کالج - حیدرآباد دکن

۱۳۴۴ھ م ۱۳۳۵ف م ۱۹۲۵ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

فہرست مضامین

ہندسہ (ہال اینڈ سٹیونز) حصۂ پنجم

ہندسۂ مستوی (ہال اینڈ سٹیونز)

حصۂ پنجم

تعریفیں اور ابتدائی اُصول

۔ ایک مقدار کو دوسری ہم جنس مقدار کے ساتھ جو رشتہ ہو بلحاظ بڑا چھوٹا ہونے کے اُس کو **نسبت** کہتے ہیں۔ اِن مقادیر کا مقابلہ آپس میں یہ دیکھنے سے کیا جاتا ہے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کونسا ضِعف یا کسر ہے۔ اِس ضِعف یا کسر کو ہم نسبت کا ناپ مقرر کرتے ہیں۔

پس اگر ایسی دو مقداروں میں بالترتیب اَ اور بَ اکائیاں شامل ہوں

تو پہلی کی نسبت دوسری کے ساتھ کسر اَ/بَ سے تعبیر ہوگی۔

اَ اور بَ کی نسبت کو بالعموم اِس طرح لکھتے ہیں اَ : بَ، اَ کو نسبت کا مقدم اور بَ کو موخر کہتے ہیں۔

یہ ضروری ہے کہ نسبت میں جن دو مقداروں کا مقابلہ کیا جائے وہ ایک ہی جنس کی ہوں مثلاً دونوں خطوط ہوں یا دونوں زاویے یا دونوں رقبے، کیونکہ یہ صریحاً ناممکن ہے کہ ایک خطِ مستقیم کے طول کا مختلف قسم کی مقدار مثلاً مثلث کے رقبے کے ساتھ مقابلہ کیا جائے۔ نیز یاد رہے کہ نسبت ایک عدد

(یا کسر) مجرد ہے مثلاً ۶ سنتی میٹر لمبے خط کو جو نسبت ۸ سنتی میٹر لمبے خط کے ساتھ ہے وہ محض $\frac{۶}{۸}$ یا $\frac{۳}{۴}$ ہے (اور $\frac{۳}{۴}$ سنتی میٹر نہیں ہے)

نوٹ ۔ اگر ایک ہی جنس کی دو مقداریں ہوں تو یہ ہمیشہ ممکن نہیں ہوتا کہ ان دونوں کو ایک مشترک اکائی کی رقوم میں بیان کیا جا سکے، مثلاً اگر مربع کا ضلع ۱ انچ ہو تو اس کا قطر $\sqrt{۲}$ انچ ہوگا، لیکن $\sqrt{۲}$ کی قیمت ٹھیک طور پر نہیں نکل سکتی (اگرچہ اعشاریہ کے جتنے ہندسوں تک ہم اسے نکالنا چاہیں نکال سکتے ہیں) اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مربع کا ضلع اور قطر جو ایک ہی قسم کی دو مقداریں ہیں کسی ایک ہی اکائی کی رقوم میں دونوں صحیح طور پر بیان نہیں ہو سکتیں۔ ایسی دو مقداروں کو **متباین** کہتے ہیں۔ لیکن اکائی کو کافی طور پر چھوٹا منتخب کرنے سے ہم دو متباینوں کو اس کی رقوم میں کسی مطلوبہ درجہ صحت تک باآسانی بیان کر سکتے ہیں۔ مثلاً $\sqrt{۲}$ انچ اور ۱ انچ کی صورت میں ہم جانتے ہیں کہ

$\sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲...$ اسلئے $\sqrt{۲}$ انچ اور ۱ انچ ذیل کے عددوں سے تعبیر ہو سکتے ہیں

۱۴۱۴ اور ۱۰۰۰، معمولی اندازہ، جبکہ $\frac{۱''}{۱۰۰۰}$ اکائی ہو۔

۱۴۱۴۲ اور ۱۰۰۰۰، زیادہ اچھا اندازہ، جبکہ $\frac{۱''}{۱۰۰۰۰}$ اکائی ہو وغیرہ



۲۔ خط مستقیم اب پر یا اب ممدودہ پر کوئی نقطہ لا لیا گیا ہے، اب جس نسبت سے لا خط اب کو تقسیم کرتا ہے اس سے مراد اب کے



حصوں کی نسبت ہے یعنی ا لا : لا ب خواہ تقسیم اندرونی ہو جیسے شکل (۱) میں یا بیرونی ہو جیسے شکل (۲) میں –

۳ – چار مقداریں **تناسب** میں کہلاتی ہیں جبکہ پہلی کو دوسری کے ساتھ وہی نسبت ہو جو تیسری کو چوتھی شے کے ساتھ ہے –

اگر ا کو ب سے وہی نسبت ہو جو لا کو ما سے ہے تو یہ چاروں مقداریں متناسب کہلاتی ہیں ربط تناسب کو یوں لکھتے ہیں

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا}}{\text{ما}}$$

یا ا : ب = لا : ما

اور اسکو پڑھتے اس طرح ہیں کہ ا کو ب سے وہی نسبت ہے جو لا کو ما سے ہے۔

ا اور ما طرفین تناسب ہیں اور ب اور لا وسطین –

ما کو ا، ب اور لا کا چوتھا متناسب کہتے ہیں –

کسی تناسب میں ایسی رقموں کو جو دونوں مقدم ہوں یا دونوں موخر ہوں ہم **متناظر** رقمیں کہینگے –

نوٹ – کسی تناسب میں (مثلاً ا : ب = لا : ما میں) ہر نسبت کی مقداریں ایک ہی قسم کی ہونی چاہئیں اگرچہ یہ ضروری نہیں کہ دوسری نسبت کی مقداریں اسی قسم کی ہوں جس قسم کی کہ پہلی نسبت کی مقداریں ہیں – مثلاً ایسا ہو سکتا ہے کہ ا اور ب دونوں رقبے ہوں اور لا اور ما دو خطوط اور اس صورت میں تناسب کے یہ معنی ہونگے کہ پہلے رقبہ کو دوسرے رقبہ کے ساتھ وہی نسبت ہے جو پہلے خط کو دوسرے خط کے ساتھ ہے –

۴ – ایک ہی قسم کی تین مقداریں متناسب کہلاتی ہیں اگر پہلی کو دوسری کے ساتھ وہی نسبت ہو جو دوسری کو تیسری کے ساتھ ہے۔

مثلاً ا، ب، ج باہم متناسب ہوں گے اگر

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$$

یا $ا : ب = ب : ج$

یہاں ب کو ا اور ج کا وسط متناسب کہتے ہیں

اور ج ، ا اور ب کا تیسرا متناسب کہلاتا ہے۔

علوم متعارفہ

(۱) جو نسبتیں ایک ہی نسبت کے مساوی ہوں وہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

مثلاً اگر $ا : ب = لا : ما$ اور $ج : د = لا : ما$

تو ظاہر ہے کہ $ا : ب = ج : د$

(۲) جو مقداریں ایک ہی مقدار کے ساتھ وہی نسبت رکھیں وہ باہم مساوی ہوتی ہیں

مثلاً اگر $ا : لا = ب : لا$

تو $ا = ب$

ابتدائی مسائل

۱۔ اگر چار مقداریں متناسب ہوں تو وہ متناسب رہیں گی اگر انہیں بالعکس لیا جائے۔

یعنی اگر $ا : ب = لا : ما$

تو یہ دیکھنا ہے کہ $ب : ا = ما : لا$

مفروض کی بنا پر $\frac{ا}{ب} = \frac{لا}{ما}$ اسلئے $\frac{ب}{ا} = \frac{ما}{لا}$

یعنے $ب : ا = ما : لا$

۲۔ اگر ایک ہی قسم کی چار مقداریں متناسب ہوں تو وہ متناسب رہینگی اگر ان کو متبادلاً لیا جائے۔

یعنی اگر $ا : ب = لا : ما$

تو یہ دیکھنا ہے کہ اَ : لاَ = بَ : ماَ

مفروض کی بنا پر $\frac{\text{اَ}}{\text{بَ}} = \frac{\text{لاَ}}{\text{ماَ}}$

طرفین کو $\frac{\text{بَ}}{\text{لاَ}}$ کے ساتھ ضرب دینے سے

$$\frac{\text{اَ}}{\text{بَ}} \times \frac{\text{بَ}}{\text{لاَ}} = \frac{\text{لاَ}}{\text{ماَ}} \times \frac{\text{بَ}}{\text{لاَ}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{اَ}}{\text{لاَ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{ماَ}}$$

یعنی اَ : لاَ = بَ : ماَ

نوٹ ۔ اس مسئلہ میں مفروض کی بنا پر اَ اور بَ کو ایک ہی قسم کی مقداریں ہونا چاہیئے، نیز لاَ اور ماَ کو ایک ہی قسم کی مقداریں ہونا چاہیئے۔ نتیجہ کی رو سے اَ اور لاَ کا ایک ہی قسم کی مقداریں ہونا ضروری ہے نیز بَ اور ماَ کو ایک ہی قسم کی مقداریں ہونا چاہیئے۔

۳ ۔ اگر چار عدد متناسب ہوں تو طرفین کا حاصل ضرب وسطین کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

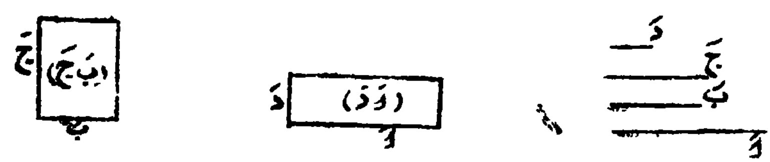
یعنی اگر اَ : بَ = جَ : دَ تو ثابت کرنا ہے کہ اَ دَ = بَ جَ

مفروض کی بنا پر $\frac{\text{اَ}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جَ}}{\text{دَ}}$

اس مساوات کے ہر طرف بَ دَ کے ساتھ ضرب دینے سے

اَ دَ = بَ جَ

نتیجہ صریح اگر چار خطوط مستقیم جن کے طول اَ، بَ، جَ، دَ ہیں تناسب میں ہوں تو اوپر کے نتیجہ کی رو سے طرفین کی سطح وسطین کی سطح کے مساوی ہو[گی]۔ ذیل کی شکل میں اس کی توضیح کی گئی ہے۔



اسی طرح سے اگر تین خطوط مستقیم ا، ب، ج متناسب ہوں، یعنی اگر ا : ب = ب : ج تو ا × ج = ب^2 یعنی طرفین کی سطح وسط تناسب کے مربع کے مساوی ہے۔

۴ — اگر چار مقداریں تناسب میں ہوں تو پہلی اور دوسری کے مجموعہ (یا فرق) کو دوسری کے ساتھ وہی نسبت ہوگی جو تیسری اور چوتھی کے مجموعہ (یا فرق) کو چوتھی کے ساتھ ہے۔

یعنی اگر ا : ب = لا : ما تو دیکھنا ہے کہ

(۱) ا + ب : ب = لا + ما : ما

(۲) ا − ب : ب = لا − ما : ما

مفروض کی بنا پر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا}}{\text{ما}}$

اس لئے $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} + 1 = \frac{\text{لا}}{\text{ما}} + 1$ یعنی $\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{ما}}$

یعنی ا + ب : ب = لا + ما : ما .... (۱)

اس نتیجہ کو بعض اوقات ترکیب نسبت کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔

اسی طرح مساوی نسبتوں $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ اور $\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ سے ایک تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

$\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{ما}}$ یعنی ا − ب : ب = لا − ما : ما .... (۲)

اس نتیجہ کو بعض اوقات تفصیل نسبت کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح — اگر ا : ب = لا : ما

تو ا + ب : ا − ب = لا + ما : لا − ما

نتیجہ (۱) کو نتیجہ (۲) پر تقسیم کرنے سے یہ حاصل ہوگا۔

۵ — مساوی نسبتوں کا ایک سلسلہ دیا ہوا ہے (سب مقداریں ایک ہی

قسم کی ہیں) کسی نسبت کے مقدم کو اپنے موخر کے ساتھ وہی نسبت ہوگی جو سب مقدموں کے مجموعہ کو سب موخروں کے مجموعہ کے ساتھ ہے۔

یعنی اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ب}}{\text{م}} = \frac{\text{ج}}{\text{ی}} = \dots\dots$

تو دکھانا ہے کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \dots\dots}{\text{ل} + \text{م} + \text{ی} + \dots\dots}$

فرض کرو کہ مساوی نسبتوں $\frac{\text{ا}}{\text{ل}}$ ، $\frac{\text{ب}}{\text{م}}$ ، $\frac{\text{ج}}{\text{ی}}$ ، ..... میں سے ہر ایک مَ کے مساوی ہے۔

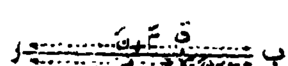
اس طرح ا = مَ ل ، ب = مَ م ، ج = مَ ی ، .....

جمع کرنے سے ا + ب + ج + ... = مَ (ل + م + ی + ...)

اس لئے $\frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \dots\dots}{\text{ل} + \text{م} + \text{ی} + \dots\dots} = \text{مَ} = \frac{\text{ا}}{\text{ل}}$

یعنی ا : ل = ا + ب + ج + ... : ل + م + ی + ...

۶۔ ایک خطِ مستقیم کسی معلومہ نسبت سے داخلاً، ایک اور صرف ایک نقطہ پر تقسیم ہو سکتا ہے، اسی طرح خارجاً صرف ایک نقطہ پہ تقسیم ہو سکتا ہے۔



شکل ۱



شکل ۲

فرض کرو کہ اب خط معلومہ ہے اور مَ : نَ دی ہوئی نسبت ہے جس میں مَ بڑا ہے نَ سے۔

داخلی تقسیم۔ (۱) اب کو (مَ + نَ) مساوی حصوں میں تقسیم کیا

(شکل ۱) (مسئلہ عملی ۷) اِن میں سے مَ حصے الگ لو جو فرض کرو کہ
ا لا میں شامل ہوتے ہیں اور نَ حصے لا ب میں۔

اِس طرح ا لا : لا ب = مَ : نَ

یعنی ا ب کی نقطہ لا پر داخلاً معلومہ نسبت میں تقسیم ہوتی ہے۔
(۲) نیز چونکہ ا لا اور ا ب میں بالترتیب مَ اور مَ + نَ
مساوی حصے شامل ہوتے ہیں، اسلئے

ا لا : ا ب = مَ : مَ + نَ

اسی طرح سے اگر کوئی نقطہ ق خط ا ب کو نسبت مَ : نَ سے
تقسیم کرتا ہو تو لازماً

ا ق : ا ب = مَ : مَ + نَ

اسلئے $\frac{\text{ا لا}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ق}}{\text{ا ب}}$ اس لئے ا لا = ا ق

اس لئے ق اور لا ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں یعنی لا
صرف ایک ہی نقطہ ہے جس پر ا ب کی داخلاً نسبت مَ : نَ سے
تقسیم ہوتی ہے۔

خارجی تقسیم۔ (۱) ا ب کو (مَ - نَ) مساوی حصوں
میں تقسیم کرو (شکل ۲)
اور ا ب کو لا تک اتنا بڑھاؤ کہ ا لا میں مَ ایسے حصے شامل
ہوں، تب ب لا میں نَ ایسے حصے شریک ہوں گے۔

اس طرح ا لا : ب لا = مَ : نَ

یعنی ا ب نقطہ لا پر خارجاً معلومہ نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔
(۲) اور حسب بالا ہم اسے ثابت کر سکتے ہیں کہ لا صرف ایک ہی نقطہ ہے
جو ا ب کو خارجاً نسبت مَ : نَ سے تقسیم کرتا ہے۔

مشقیں

۱۔ ذیل کے تناسبوں میں جو رقمیں موجود نہیں انھیں مندرج کرو۔

(۱) ۳ : ۷ = ۱۵ : (   )

(۲) ۲ء۵ : (   ) = ۱۰ : ۳۲

(۳) دَ جَ۲ = بَ جَ : بَ جَ۳ : (   )

۲۔ ذیل کے بیان کو درست کرو۔

۶۵ پونڈ : ۸ء۷ فٹ = ۲۵ پونڈ : ۳۰ فٹ

۳۔ ایک خطِ مستقیم ۶ء۹ انچ لمبا ہے، اس کو داخلاً نسبت ۵ : ۷ سے تقسیم کیا گیا ہے، اس کے حصوں کا طول معلوم کرو۔

۴۔ ایک خطِ مستقیم ۵ء۴ سنتی میٹر لمبا نسبت ۱۱ : ۸ سے خارجاً تقسیم کیا گیا ہے، اس کے حصوں کے طول معلوم کرو۔

۵۔ خطِ مستقیم ا ب، ۴ء۶ سنتی میٹر لمبا ہے، اس کو داخلاً لا پر اور خارجاً ما پر نسبت ۵ : ۳ سے تقسیم کیا گیا ہے، اس کے حصوں کے طول معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ ذیل کے ضابطہ کو پورا کرتے ہیں

$$\frac{\text{۲}}{\text{اب}} = \frac{\text{۱}}{\text{الا}} + \frac{\text{۱}}{\text{اما}}$$

۶۔ رَ انچ لمبا ایک خطِ مستقیم داخلاً نسبت مَ : نَ سے تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ حصوں کے طول بالترتیب ہیں

$$\frac{\text{مَ}}{\text{مَ + نَ}}\ \text{رَ انچ}،\quad \frac{\text{مَ}}{\text{مَ + نَ}} \times \text{رَ انچ}$$

۷۔ ایک خطِ مستقیم کا طول رَ اکائیاں ہے، یہ خارجاً نسبت مَ : نَ سے تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس کے حصوں کے طول بالترتیب

$$\frac{\text{مَ}}{\text{مَ - نَ}} \times \text{رَ اکائیاں}،\quad \frac{\text{نَ}}{\text{مَ - نَ}} \times \text{رَ اکائیاں ہیں۔}$$

۸۔ اگر دَ : بَ = لاَ : ماَ اور بَ : جَ = ماَ : یَ تو ثابت کرو کہ

دَ : جَ = لاَ : یَ

۹۔ اگر دَ : بَ = لاَ : ماَ تو ثابت کرو کہ دَ + بَ : دَ = لاَ + ماَ : لاَ

۱۰۔ اَ، بَ، جَ تین متناسب ہیں، ثابت کرو کہ اَ : جَ = اَ^{۲} : بَ^{۲}

۱۱۔ اگر دو خطوطِ مستقیم اب اور جد ایک ہی نسبت سے بالترتیب لا اور ما پر داخلاً تقسیم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ

(۱) اب : لاب = جد : ماد

(۲) اب : الا = جد : جما

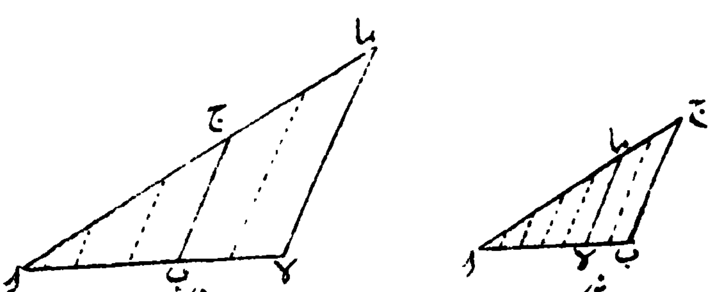
۱۲۔ اَ، بَ، جَ، دَ چار خط ایسے ہیں کہ اَ اور دَ پر کی سطح بَ اور جَ پر کی سطح کے مساوی ہے، ثابت کرو کہ

اَ : بَ = جَ : دَ

خطوطِ مستقیم کی تناسبی تقسیم

مسئلہ اثباتی ۶۰ [اقلیدس م ۶ ش ۲]

اگر ایک خط مستقیم مثلث کے کسی ایک ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو یہ باقی دو اضلاع کو یا اضلاع مخرجہ کو ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔



شکل ۲ — شکل ۱

فرض کرو کہ مثلث ابج میں خط لاما ضلع بج کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ اضلاع اب اور اج کو بالترتیب لا اور ما پر ملتا ہے داخلاً شکل (۱) میں اور خارجاً شکل (۲) میں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ

ا لا : لا ب = ا ما : ما ج

ثبوت۔ فرض کرو کہ لا ضلع ا ب کو نسبت م : ن سے تقسیم کرتا ہے
یعنی فرض کرو کہ ا لا : لا ب = م : ن

پس اگر ا لا کو م مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو لا ب میں ایسے ن مساوی حصے شامل ہونگے۔

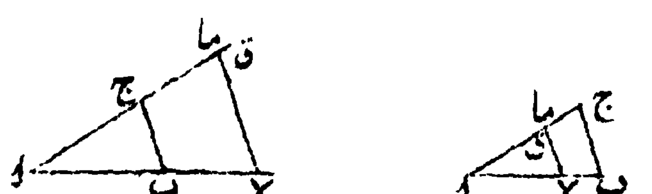
ا لا اور لا ب کے نقاط تقسیم میں سے ب ج کے متوازی خط کھینچو۔ ان متوازیوں سے ا ما اور ما ج پر چھوٹے حصے قطع ہوں گے جو سب آپس میں مساوی ہوں گے مسئلہ اثباتی ۲۲

اور ان مساوی حصوں میں سے ا ما میں م شامل ہوں گے اور ما ج میں ن۔

اس لئے ا ما : ما ج = م : ن

پس ا لا : لا ب = ا ما : ما ج

برعکس اس کے اگر کوئی خط مستقیم مثلث کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت سے کاٹے تو یہ تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔



شکل ۲ شکل ۱

فرض کرو کہ لا ما اضلاع ا ب، ا ج کو ایک ہی نسبت سے کاٹتا ہے
یعنی ا لا : لا ب = ا ما : ما ج

تو ثابت کرنا مطلوب ہے کہ لا ما ب ج کے متوازی ہے۔

نقطہ لا میں سے لا ق ضلع ب ج کے متوازی کھینچو کہ یہ ا ج

سے ق پر ملے۔

تب ا ق : ق ج = ا لا : لا ب

لیکن مفروض کی بنا پر

ا ما : ما ج = ا لا : لا ب

پس ا ج کی ق اور ما پر داخلاً شکل ا میں اور خارجاً شکل ۲ میں ایک ہی نسبت سے تقسیم ہوتی ہے۔

اس لئے ق، ما پر منطبق ہوتا ہے اور لا ق، لا ما پر۔

مسئلہ ۶ صفحہ ۷

یعنی لا ما متوازی ہے ب ج کے۔

نتیجہ صریح اگر لا ما، ب ج کے متوازی ہو تو

ا لا : ا ب = ا ما : ا ج

شکل ا سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

ا لا : ا ب = مَ : مَ + نَ

اسلئے مسئلہ اثباتی ۲۲ سے

ا ما : ا ج = مَ : مَ + نَ

اسلئے ا لا : ا ب = ا ما : ا ج

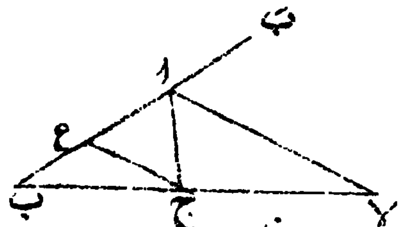
برعکس اسکے اگر ا لا : ا ب = ا ما : ا ج

توحسب بالا یہ ثابت ہوسکتا ہے کہ لا ما متوازی ہے ب ج کے۔

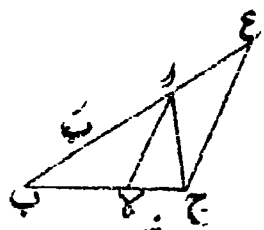
مسئلہ اثباتی ۶۱ [اقلیدس م ۶ ش ۳ اور (ا)]

اگر مثلث کے راسی زاویہ کو داخلاً یا خارجاً تنصیف کیا جائے تو تنصیف کرنے والا خط (منصف) قاعدہ کو داخلاً یا خارجاً ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جنکی نسبت باقی اضلاع کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔ برعکس اس کے اگر قاعدہ کو داخلاً یا خارجاً ایسے حصوں میں تقسیم کیا جائے جنکی

نسبت مثلث کے باقی اضلاع کی نسبت کے مساوی ہو تو نقاط تقسیم کو راس کے ساتھ ملانے والا خط راسی زاویہ کی داخلاً یا خارجاً تنصیف کرتا ہے۔



شکل ۲



شکل ۱

△ ا ب ج میں فرض کرو کہ ا لا زاویہ ب ا ج کی تنصیف کرتا ہے داخلاً شکل (۱) میں اور خارجاً شکل (۲) میں، یعنی موخرالذکر صورت میں فرض کرو کہ ا لا خارجی ∠ بَ ا ج کی تنصیف کرتا ہے۔

دونوں صورتوں میں یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ

ب لا : لا ج = ب ا : ا ج

ج میں سے ج ع خط لا ا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ب ا سے (یا ب ا ممدودہ سے) ع پر ملتا ہے شکل ۱ میں ایک نقطہ بَ ا ب میں فرض کرو۔

ثبوت۔ چونکہ لا ا اور ج ع متوازی ہیں

اس لئے دونوں شکلوں میں ∠ بَ ا لا

= مقابل کا اندرونی ∠ ا ع ج

نیز مفروض کی بنا پر ∠ ب ا لا = ∠ لا ا ج

= متبادل ∠ ا ج ع

اس لئے ∠ ا ع ج = ∠ ا ج ع

اس لئے ا ج = ا ع

نیز چونکہ لا ا متوازی ہے ج ع کے جو مثلث ب ج ع کا ایک ضلع ہے اس لئے دونوں شکلوں میں

ب لا : لا ج = ب ا : ا ع یعنی ب لا : لا ج = ب ا : ا ج

برعکس اسکے فرض کرو کہ ب ج کی لا پر داخلاً (شکل ۱) یا خارجاً
(شکل ۲) میں اس طرح تقسیم کی گئی ہے کہ

ب لا : لا ج = ب ا : ا ج

یہ ثابت کرنا ہے کہ ∠ ب ا لا = ∠ لا ا ج

ثبوت - اوپر کے عمل کے موافق چونکہ لا ا متوازی ہے ج ع کے جو
△ ب ج ع کا ایک ضلع ہے

اس لئے ب لا : لا ج = ب ا : ا ع

لیکن مفروضہ کی بنا پر ب لا : لا ج = ب ا : ا ج

اس لئے ب ا : ا ج = ب ا : ا ع

اس لئے ا ج = ا ع اسلئے ∠ ا ع ج = ∠ ا ج ع

= متبادل ∠ لا ا ج

اسلئے دونوں شکلوں میں خارجی ∠ ب ا لا

= مقابل کا اندرونی ∠ ا ع ج

اسلئے ∠ ب ا لا = ∠ لا ا ج

تعریف

ایک محدود خط مستقیم ہے، اس کو داخلاً دو حصوں میں اور خارجاً دو حصوں میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ داخلی حصوں کی نسبت خارجی حصوں کی نسبت کے مساوی ہے، خط کی ایسی تقسیم کو **موسیقی تقسیم** کہتے ہیں۔

اس تعریف کی بنا پر مسئلہ ۶۱ سے ذیل کا نتیجہ صریح حاصل ہوتا ہے۔
مثلث کے راسی زاویہ کے داخلی اور خارجی منصف قاعدہ کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

یہ ظاہر ہے کیونکہ ہر صورت میں قاعدہ کے دو حصوں کی نسبت باقی اضلاع کی نسبت کے مساوی ہے۔

موسیقی تقسیم کے متعلق نظری مسائل اور مثالوں کے لئے ملاحظہ ہو صفحہ ۱۱۱

مشقیں مسئلہ ۶۰ پر

(عددی و ترسیمی)

۱۔ قاعدہ اب = ۳ء۵ انچ پر کوئی مثلث ج اب بناؤ، اب سے کاٹو الا = ۲ء۱ انچ۔
لا میں سے لاما، ب ج کے متوازی کھینچو جو اج سے ما پر ملے۔ اما، ماج کو ناپو، اور ذیل کی نسبتوں کا مقابلہ کرو

(۱) الا/لاب ، اما/ماج   (۲) اب/الا ، اج/اما

(۳) اب/لاب ، اج/ماج

۲۔ مثلث ا ب ج میں لاما، ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے جو باقی اضلاع سے لا اور ما پر ملتا ہے۔

(۱) اگر اب = ۳ء۶ انچ، اج = ۲ء۴ انچ اور الا = ۲ء۱ انچ تو اما کا طول معلوم کرو۔

(۲) اگر اب = ۲ء۰ انچ، اج = ۱ء۵ انچ اور اما = ۰ء۹ تو بلا کا طول معلوم کرو۔

(۳) اگر لا، اب کو نسبت ۸ : ۳ سے تقسیم کرے اور اگر اج = ۸ء۸ سنتی میٹر تو اما، ماج کے طول معلوم کرو۔

۳۔ اب ج ایک مثلث ہے، اس میں لاما ضلع ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے جو باقی اضلاع ممدودہ سے لا اور ما پر ملتا ہے

(۱) اگر اب = ۴ء۵ سنتی میٹر، اج = ۳ء۵ سنتی میٹر اور الا = ۲ء۷ سنتی میٹر تو حساب اور پیمائش سے اما کا طول معلوم کرو۔

(۲) اگر ۷ ؛ اب کو خارجاً نسبت ۱۱ : ۴ سے تقسیم کرے اور اگر اج = ۹ء۴ سنتی میٹر تو اج کے حصوں کے طول معلوم کرو۔

(نظری)

۴۔ تین متوازی خطوط مستقیم کسی دو قاطع خطوط کو ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۵۔ جو خط منحرف کے مائل اضلاع کے نقاط وسطی کو ملاتا ہے وہ متوازی اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔

۶۔ دو مثلث اب ج، د ب ج مشترک قاعدہ ب ج کے ایک ہی طرف واقع ہیں۔ قاعدہ کے کسی نقطہ ع میں سے ب ا اور ب د کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو اج، د ج سے بالترتیب ف اور گ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف گ، اد کے متوازی ہے۔

۷۔ مثلث اب ج میں ایک قاطع کھینچا گیا ہے جو اضلاع ب ج، ج ا، اب (ممدودہ بشرط ضرورت) سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتا ہے اور اب اور اج کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے، ثابت کرو کہ

ب د : ج د = ب ف : ج ع

مسئلہ ۱۶ پر مشقیں

(عددی اور ترسیمی)

۱۔ مثلث اب ج بناؤ جس میں اَ = ۵ء۱"، بَ = ۴ء۲"، جَ = ۶ء۳" ہوں جہاں اَ، بَ، جَ اضلاع ب ج، ج ا، اب کے طول ہیں۔ زاویہ ا کی داخلاً اور خارجاً دو خطوط سے تنصیف کرو جو

ب ج سے اور ب ج ممدودہ سے لا اور ما پر ملیں۔ ب لا، لا ج، ب ما، ما ج کو ناپو، اِس طرح ذیل کی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرو اور ان کا مقابلہ کرو۔

$$\frac{\text{ب لا}}{\text{لا ج}} \;،\; \frac{\text{ب ما}}{\text{ما ج}} \;،\; \frac{\text{ب ا}}{\text{ا ج}}$$

۲۔ مثلث ا ب ج میں ا ج = ۳ء۵ سنٹی میٹر، ا ب = ۲ء۵ سنٹی میٹر، ب ج = ۲ء۷ سنٹی میٹر، زاویہ ا کے داخلی اور خارجی منصِّف ب ج سے لا اور ما پر ملتے ہیں۔

جن حصوں میں لا اور ما قاعدہ کو تقسیم کرتے ہیں اُن کے طول معلوم کرو اور اپنے نتائج کی تصدیق ترسیمی طور پر کرو۔

۳۔ مسئلہ ۶۱ کی بنا پر ذیل کے عمل مرتب کرو

(۱) دئے ہوئے طول کے خط مستقیم کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنا۔

(۲) دئے ہوئے خط کو داخلاً اور خارجاً نسبت ۳ : ۲ میں تقسیم کرنا۔

(نظری)

۴۔ مثلث ا ب ج کا خط ا د وسطانیہ ہے، زاویوں ا د ب، ا د ج کی تنصیف ایسے خطوط کے ذریعہ کی گئی ہے جو ا ب، ا ج سے بالترتیب ع اور ف پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ع ف، ب ج کے متوازی ہے۔

۵۔ ا ب ج د ایک ذوار بعۃ الاضلاع (چار ضلعی) ہے، اگر زاویوں ا اور ج کے منصِّف قطر ب د پر ملیں تو ب اور د کے منصِّف ا ج پر ملیں گے۔

۶۔ مسئلہ ۶۱ کی مدد سے ثابت کرو کہ مثلث کے

(۱) تین زاویوں کے داخلی منصِّف ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

(۲) دو زاویوں کے خارجی منصِّف اور تیسرے زاویہ کا داخلی منصِّف

ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

۷۔ اگر مثلث ا ب ج کا داخلی مرکز د ہو اور ا د کو اتنا خارج کیا جائے کہ یہ ب ج سے لا پر ملے تو ثابت کرو کہ

ا د : د لا = ا ب + ا ج : ب ج

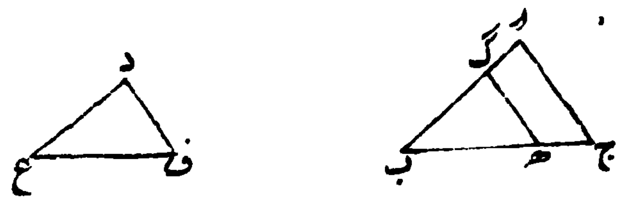
۸۔ مثلث کا قاعدہ معلوم ہے اور باقی اضلاع کی نسبت معلوم ہے، راس کا طریق معلوم کرو۔

۹۔ مثلث بناؤ، اس کا قاعدہ، راسی زاویہ اور باقی اضلاع کی نسبت تینوں معلوم ہیں۔

متساوی الزوایا مثلث

مسئلہ اثباتی ۶۲ [اقلیدس م ۶ ش ۴]

اگر دو مثلث متساوی الزوایا ہوں تو ان کے متناظر اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ مثلثات ا ب ج، د ع ف میں زاویے ا اور ب بالترتیب مساوی ہیں زوایا د اور ع کے، نیز اس لئے زاویے ج اور ف باہم مساوی ہیں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ

ا ب : د ع = ب ج : ع ف = ج ا : ف د

ثبوت۔ ∆ د ع ف کو ∆ ا ب ج پر رکھو اس طرح کہ ع، ب پر اور ع ف، ب ج پر واقع ہو تب چونکہ ∠ د ع = ∠ ب، ع د ضلع ب ا پر پڑے گا۔

فرض کرو کہ د آکے گ پر اور ف نقطہ ھ پر پڑتا ہے یعنی
گ ب ھ مثلث د ع ف کا نیا مقام ہے۔
اب مفروضات کی بنا پر ∠ د = ∠ ا
یعنی خارجی ∠ ب گ ھ = مقابل کا داخلی ∠ ب ا ج
اسلئے گ ھ ‖ ا ج

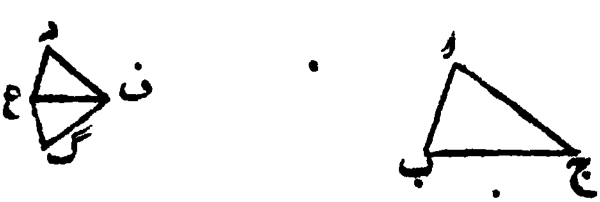
اور اسلئے ب ا : ب گ = ب ج : ب ھ مسئلہ ۱۰ نتیجہ

یعنی ا ب : د ع = ب ج : ع ف

اسی طرح △ د ع ف کو △ ا ب ج پر اس طرح رکھنے سے
کہ ف ج پر واقع ہو اور ف ع ، ف د بالترتیب ج ب
اور ج ا پر پڑیں ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ
ب ج : ع ف = ج ا : ف د
پس ثابت ہوا کہ
ا ب : د ع = ب ج : ع ف = ج ا : ف د

مسئلہ اثباتی ۶۳ [اقلیدس م ۶ ش ۵]

اگر دو مثلثوں کے ضلعے متناسب ہوں جبکہ اُنہیں ایک ہی ترتیب میں لیا جائے تو مثلث متساوی الزوایا ہوں گے اور ان کے وہ زاویے مساوی ہونگے جو متناظر اضلاع کے سامنے ہیں۔



مثلثوں اب ج، د ع ف میں فرض کرو کہ

اب : د ع = ب ج : ع ف = ج ا : ف د

یہ ثابت کرنا ہے کہ یہ متساوی الزوایا ہیں۔

ع ف کے نقطہ ع پر ∠ ف ع گ، ∠ ب کے مساوی بناؤ

اور ع ف کے نقطہ ف پر ∠ ع ف گ، ∠ ج کے مساوی بناؤ

باقی ∠ ع گ ف = باقی زاویہ ا

ثبوت چونکہ مثلثوں اب ج اور گ ع ف کے زاویے باہم مساوی ہیں

اس لئے اب : گ ع = ب ج : ع ف مسئلہ ۶۲

لیکن مفروضات کی بنا پر اب : د ع = ب ج : ع ف

اس لئے اب : گ ع = اب : د ع

یعنی گ ع = د ع، اسی طرح سے گ ف = د ف

اب مثلثوں گ ع ف اور د ع ف میں

گ ع = د ع، گ ف = د ف اور ع ف مشترک ہے

اس لئے دونوں مثلث ہر طرح سے مساوی ہیں مسئلہ ۷

اس لئے ∠ د ع ف = ∠ گ ع ف = ∠ ب

اور ∠ د ف ع = ∠ گ ف ع = ∠ ج

اور باقی کا ∠ د = باقی کا ∠ ا

یعنی مثلثوں د ع ف اور اب ج کے زاویے باہم مساوی ہیں۔ اور یہی ثابت کرنا تھا۔

متساوی الزوایا مثلثوں پر مشقیں

(عددی اور ترسیمی۔ نتائج حساب لگانے سے حاصل کئے جائیں اور اِن کی تصدیق ترسیمی طریق پر کی جائے)

۱۔ مثلث اب ج میں لاما، ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے جو باقی اضلاع کو لا اور ما پر کاٹتا ہے۔

(۱) اگر اب = ۲،۵″، اج = ۲،۰″، الا = ۱،۵″ تو اما معلوم کرو۔

(۲) اگر اب = ۳،۵″، اج = ۲،۱″، اما = ۱،۲″ تو الا معلوم کرو۔

(۳) اگر اب = ۲،۴ سنتی میٹر، الا = ۳،۶ سنتی میٹر، اما = ۱،۶ سنتی میٹر تو اج معلوم کرو۔

۲۔ اوپر کی مثال کی شکل میں

(۱) اگر اب = ۲،۴″، ب ج = ۳،۶″، الا = ۱،۴″ تو لاما معلوم کرو۔

(۲) اگر ب ج = ۷،۰ سنتی میٹر، لاما = ۵،۵ سنتی میٹر، الا = ۴،۵ سنتی میٹر تو اب معلوم کرو۔

۳۔ مثلث اب ج میں اضلاع اَ = ۳،۰″، بَ = ۳،۶″، جَ = ۴،۲″۔ خط ق ط، اج کے متوازی کھینچا گیا ہے اور اس کا طول ۳،۰″ ہے، مثلث ق ب ط کے باقی اضلاع کا طول معلوم کرو۔

۴۔ مثلث اب ج میں اَ = ۸ سنتی میٹر، بَ = ۷ سنتی میٹر، جَ = ۱۰ سنتی میٹر، ضلع اب میں نقطہ ن لیا گیا ہے جو ا سے ۴ سنتی میٹر کے فاصلہ پر ہے، ن ق ضلع ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ن ق اور ق ج کے طول معلوم کرو۔

۵۔ ایک مثلث کھیت کے ضلعے بالترتیب ۴۰۰ گز، ۳۵۰ گز اور ۳۰۰ گز ہیں، کھیت کے خاکے میں بڑے سے بڑا ضلع ۴، ۲ انچ لمبا دکھایا گیا ہے، باقی ضلعوں کا طول معلوم کرو۔

۶۔ مثلث ا ب ج کے قاعدہ ب ج کے متوازی لا ما کھینچا گیا ہے، اگر ا لا = ½ ۸ فٹ، لا ما = ½ ۳ فٹ، ا ما = ۶ فٹ ۲ انچ اور لا ب = ½ ۴ فٹ تو مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے طول محسوب کرو۔

۷۔ مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہے، وتر کے کسی نقطہ ن سے خط ن ق، ا ج کے متوازی کھینچا گیا ہے،

اگر ا ج = ½ ۱"، ب ج = ۳" اور ن ق = ½" تو ب ق،

ب ن اور ا ن معلوم کرو۔

۸۔ مثلث ا ب ج میں ا سے عمود ا د، ب ج پر نکالا گیا ہے، اور ا د کے نقطہ لا میں سے ب ج کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو باقی اضلاع سے ن اور ق پر ملتا ہے۔

اگر ب ج = ۹ سنتی میٹر، ا د = ۸ سنتی میٹر، د لا = ۳ سنتی میٹر تو ن ق معلوم کرو۔

۹۔ مثلث ا ب ج میں اَ = ۲،۰ سنتی میٹر، بَ = ۳،۵ سنتی میٹر، جَ = ۳،۵ سنتی میٹر۔

قاعدہ کے سروں سے ب د اور ج ع مقابل کے اضلاع تک کھینچے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ن پر قطع کرتے ہیں۔

اگر ع ن : ن ج = د ن : ن ب = ۲ : ۵ تو ع د، ا د اور د ج کے طول معلوم کرو۔

متساوی الزوایا مثلثوں پر مشقیں

(نظری)

۱۔ ثابت کرو کہ مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو جو خط ملاتا ہے وہ (۱) تیسرے ضلع کا متوازی ہوتا ہے (۲) تیسرے ضلع کا نصف ہوتا ہے۔

۲۔ منحرف ا ب ج د میں ا ب، د ج کے متوازی ہے اور اس کے قطر و پر ملتے ہیں۔
ثابت کرو کہ دا : و ج = و ب : و د
اگر ا ب = ۲ د ج تو ثابت کرو کہ و دونوں قطروں کا نقطہ تثلیث ہے۔

۳۔ ایک ہی نقطہ میں سے گذرنے والے تین خطوں کو دو متوازی خط بالترتیب ا، ب، ج اور ن، ق، ط پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ا ب : ب ج = ن ق : ق ط

۴۔ ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، د سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو ا ب کو ع پر اور ج ب مخروجہ کو ن پر کاٹتا ہے، اس شکل میں بتاؤ کہ کون سے تین مثلث متساوی الزوایا ہیں نیز ثابت کرو کہ
دا : ا ع = ن ب : ب ع = ن ج : ج د

۵۔ مثلث ا ب ج کے ضلع ا ج میں کوئی نقطہ د لیا گیا ہے، اگر ا د، د ج، ا ب، ب ج کی بالترتیب نقاط ع، ف، گ، ھ پر تنصیف کی جائے تو ثابت کرو کہ ع گ مساوی ہے ھ ف کے۔

۶۔ ا ب اور ج د دو متوازی خطوط مستقیم ہیں، ع خط ج د کا نقطہ تنصیف ہے۔ ا ج اور ب ع نقطہ ف پر اور ا ع اور ب د نقطہ گ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف گ

متوازی ہے اب کے۔

۷۔ اب ایک دائرہ کا قطر ہے، ا میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محیط سے ج پر اور ب پر کے مماس سے د پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

(۱) مثلث ج اب اور ب اد متساوی الزوایا ہیں
(۲) اج، اب، اد تین متناسب ہیں
(۳) سطح اج، اد خط اد کے سب مقامات کے لیے مستقل ہے۔

۸۔ دائرہ کے اندر کوئی نقطہ لا ہے، اس میں سے دو وتر اب، ج د کھینچے گئے ہیں اور اج، ب د کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

(۱) مثلث الاج کے زاویے دلاب کے زاویوں کے بالترتیب مساوی ہیں۔
(۲) الا : دلا = لاج : لاب

اس کی مدد سے مسئلہ ۵۰ کا متبادل ثبوت حاصل کرو۔

۹۔ اگر باہر کے نقطہ لا سے ایک دائرہ کا مماس لام اور قاطع خط لااب دونوں کھینچے جائیں اور ام، بام کو ملایا جائے تو ثابت کرو کہ

(۱) الام، م لاب متساوی الزوایا مثلث ہیں۔
(۲) لاا : لام = لام : لاب

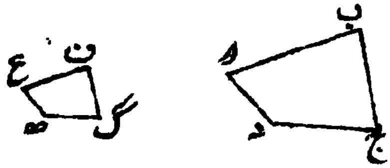
اس سے مسئلہ ۵۰ کا متبادل ثبوت حاصل کرو۔

تعریفات

۱۔ دو مستقیم الاضلاع شکلیں متساوی الزوایا کہلاتی ہیں جبکہ ایک کے زاوئیے ترتیب وار دوسری شکل کے زاویوں کے مساوی ہوں۔

۲۔ مستقیم الاضلاع شکلیں متشابہ کہلاتی ہیں جبکہ ایک کے زاوئے دوسری کے زاویوں کے ترتیب وار مساوی ہوں، نیز ان کے متناظر ضلعے متناسب ہوں۔ مثلاً دو ذواربعۃ الاضلاع اشکال ا ب ج د، ع ف گ ھ متشابہ ہوں گی اگر ا، ب، ج د پر کے زاوئے بالترتیب ع، ف گ ھ پر کے زاویوں کے مساوی ہوں۔

نیز علاوہ اس کے ذیل کے تناسب درست ہوں



$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ع ف}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ف گ}} = \frac{\text{ج د}}{\text{گ ھ}} = \frac{\text{د ا}}{\text{ھ ع}}$$

۳۔ متشابہ اشکال دو ضلعوں کے لحاظ سے متشابہ طور پر بنی ہوئی کہلاتی ہیں جبکہ یہ ضلعے ایک دوسرے کے جواب یا متناظر ہوں۔

متشابہ اشکال پر نوٹ

متشابہ اشکال ایک ہی شکل کی ہوتی ہیں

اس کے لئے دو شرطیں ضروری ہیں

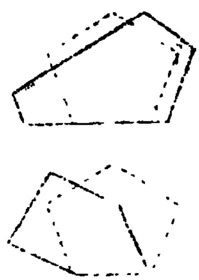
(۱) شکلوں کے زاوئے ایک ایک کرکے، ایک ہی ترتیب میں مساوی ہونے چاہئیں۔

(۲) ان کے متناظر ضلعے متناسب ہونے چاہئیں۔

مثلثوں کی صورت میں ہم نے دیکھا ہے کہ یہ شرطیں ایک دوسرے پر منحصر ہیں، ان میں سے کوئی سی ایک دوسری کا لازمی نتیجہ ہے، مثلاً

(۱) اگر ایک مثلث کے زاوئے دوسرے مثلث کے زاویوں کے [illegible] مساوی ہوں تو ہم نے دیکھا ہے (مسئلہ ۶۲) کہ انکے متناظر ضلعے [illegible]

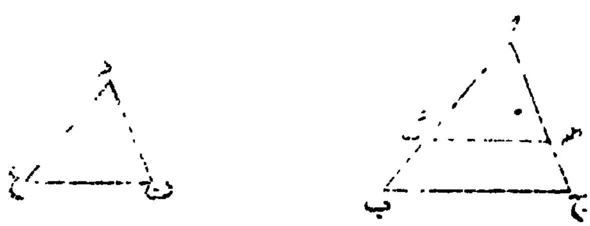
(۲) اگر مثلثوں کے ضلعے متناسب ہوں تو مسئلہ ۶۳ میں ثابت کیا گیا ہے کہ انکے زاوئے بھی مساوی ہوتے ہیں۔



لیکن تین سے زیادہ ضلعوں والی مستقیم الاضلاع اشکال کی صورت میں ان نتائج کا درست ہونا ضروری نہیں۔ مثلاً حاشیہ کی پہلی تصویر میں دو شکلیں متساوی الزوایا ہیں لیکن صریحاً ان کے ضلعے متناسب نہیں ہیں۔ دوسری تصویر میں شکلوں کے ضلعے متناسب ہیں لیکن زاوئے مساوی نہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶۴ [اقلیدس م ۶ ش ۶]

اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع متناسب ہوں تو مثلث متشابہ ہوں گے۔



فرض کرو کہ مثلثوں اب ج، دع ف میں ∠ ا = ∠ د

اور اب : دع = اج : دف

تو یہ ثابت کرنا ہے کہ مثلث اب ج اور دع ف متشابہ ہونگے۔

ثبوت۔ △ دع ف کو △ اب ج پر اس طرح رکھو کہ د، ا پر اور دع، اب پر پڑے۔ تب چونکہ ∠ ع دف = ∠ ب اج

اس لئے دف، اج پر پڑے گا۔

فرض کرو کہ ع نقطہ گ پر اور ف نقطہ ھ پر آکے پڑتا ہے۔ یعنی اگ ھ، مثلث دع ف کا نیا مقام ہے۔

مفروض کی بنا پر　اب : دع = اج : دف

یعنی　اب : اگ = اج : اھ

اسلئے گ ھ متوازی ہے ب ج کے　مسئلہ ۶۰، نتیجہ

اسلئے خارجی ∠ اگ ھ یعنی ∠ ع = مقابل کا داخلی ∠ اب ج

اور خارجی ∠ اھ گ یعنی ∠ ف = مقابل کا داخلی ∠ اج ب

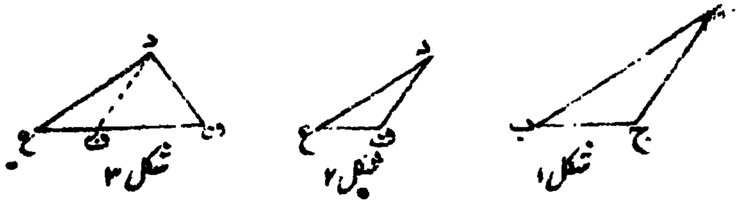
اس لئے مثلث اب ج، دع ف مساوی الزوایا ہیں۔

اس لئے ان کے متناظر اضلاع متناسب ہیں　مسئلہ ۶۲

یعنی △ اب ج اور دع ف متشابہ ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶۵، [اقلیدس م ۶ ش ۷]

دو مثلث ہیں ان میں سے ایک کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہے نیز پہلے مثلث کے کسی دوسرے زاویہ کے گرد کے اضلاع دوسرے مثلث کے متناظر اضلاع کے متناسب ہیں ثابت کرو کہ تیسرے زاوئیے یا تو مساوی ہیں یا ایک دوسرے کے تکمل (یعنی ان کا مجموعہ ۱۸۰° ہے) اور پہلی صورت میں مثلث متشابہ ہیں۔



شکل ۳　　شکل ۲　　شکل ۱

مثلثوں اب ج، دع ف میں فرض کرو کہ ∠ ب = ∠ ع اور فرض کرو کہ زاویوں ا اور د کے گرد کے اضلاع متناسب

ہیں یعنی اب : دع = اج : دف

یہ ثابت کرنا ہے کہ یا تو ∠ دج = ∠ دف [جیسا اشکال ۱ اور ۲ میں]

یا ∠ دج تکمل ہے ∠ دف کا [اشکال ۱ اور ۳]

ثبوت (۱) اگر ∠ دا = ∠ د [شکل ۱ اور ۲]

تو ∠ دج = ∠ دف

اور مثلث، مساوی الزوایا ہیں اور اس لئے متشابہ ہیں۔

(۲) اگر ∠ دا مساوی نہ ہو ∠ ع دف کے [شکل ۱ اور ۳]

تو فرض کرو کہ ∠ ع دفَ = ∠ ا

تب مثلث اب ج، دع فَ متساوی الزوایا ہیں

اسلئے اب : دع = اج : دفَ

لیکن مفروضات کی بنا پر اب : دع = اج : دف

اسلئے اج : دفَ = اج : دف

پس دفَ = دف، اسلئے ∠ دف فَ = ∠ دفَ ف

لیکن ∠ ج = ∠ دفَ ع

= ∠ دفَ ف کا تکملہ

= ∠ دف ع کا تکملہ

متشابہ مثلثوں پر مشقیں

(نظری)

۱۔ مثلث اب ج میں کوئی خط مستقیم قاعدہ ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے اور باقی اضلاع پر منتہی ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا میں سے جو وسطانیہ گزرتا ہے وہ اس خط کی تنصیف کرتا ہے۔

۲۔ دو مثلث اب ج، اَبَ جَ متساوی الزوایا ہیں، اگر اَ اور اَ سے متقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے طول ع، عَ ہوں،

س اور س، حائط دائروں کے نیم قطر ہوں اور ر، ر، اندرونی دائروں کے نیم قطر ہوں تو ثابت کرو کہ ذیل کی ہر نسبت $\frac{ع}{ع'}$، $\frac{س}{س'}$، $\frac{ر}{ر'}$ متناظر اضلاع کے کسی جوڑے کی نسبت کے مساوی ہوگی۔

۳۔ ثابت کرو کہ جو دائرہ مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط میں سے گزرتا ہے اسکا نیم قطر حائط دائرہ کے نیم قطر کا آدھا ہوتا ہے۔

۴۔ خط ا ب اور ج د ایک دوسرے کو ی پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ

ی ا : ی ج = ی د : ی ب

(۱) مسئلہ ۶۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ مثلث ا ی د، ج ی ب متشابہ

(۲) اس سے ثابت کرو کہ ا، د، ب، ج ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۔ ا، ب، ج تین ہم خط نقطے ہیں، ب اور ج سے دو متوازی خط ب ن، ج ق ایک ہی رخ پر کھینچے گئے ہیں اور

ن ب : ق ج = ا ب : ا ج

مسئلہ ۶۴ کی رو سے ثابت کرو کہ ا، ن، ق ہم خط ہیں۔

۶۔ اگر دو مثلثوں ا ب ج، ا' ب' ج' میں ∠ب = ∠ب'

اور $\frac{ج}{ج'} = \frac{ب}{ب'}$ تو بتاؤ کہ اس سے کیا نتیجہ نکلتا ہے۔

شکلیں کھینچ کر دکھاؤ کہ اس نتیجہ پر کیا اثر پڑتا ہے اگر یہ بھی دیا جائے کہ

(۱) ج کم ہے ب سے

(۲) ج مساوی ہے ب کے

(۳) ج بڑا ہے ب سے

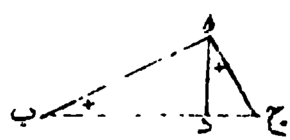
۷۔ ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، نقطہ ن اور ق ایسے خط پر لئے گئے ہیں جو ا ب کے متوازی ہے، ن ا اور ق ب

ط پر ملتے ہیں، ن د اور ق ج نقطہ س پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ط س، ا د کے متوازی ہے۔

۸۔ مثلث ا ب ج میں راسی زاویہ ا کا منصف مثلث کے قاعدہ سے د پر، حائط دائرہ کے محیط سے ع پر ملتا ہے، اگر ع ج کو ملایا جائے تو ثابت کرو کہ مثلث ب ا د، ع ا ج متشابہ ہیں اور اس لئے ثابت کرو کہ ا ب × ا ج = ا ع × ا د

مسئلہ اثباتی ۶۶ [اقلیدس م ۶ ش ۸]

مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ سے وتر پر عمود نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ اسکے دونوں طرف جو دو مثلث بنتے ہیں وہ کل مثلث کے متشابہ نیز آپس میں متشابہ ہیں۔



فرض کرو کہ ب ا ج مثلث قائم الزاویہ ہے، ا قائمہ ہے اور ا د، ب ج پر عمود ہے۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ مثلث ب د ا، ا د ج آپس میں متشابہ، نیز ∆ ب ا ج کے متشابہ ہیں۔

مثلثوں ب د ا، ب ا ج میں

∠ ب د ا = ∠ ب ا ج دونوں قائمے ہیں

زاویہ ب دونوں میں مشترک ہے، اسلئے باقی ∠ ب ا د = باقی ∠ ب ج ا مسئلہ اثباتی ۱۶

اس لئے ∆ ب د ا اور ∆ ب ا ج متساوی الزوایا ہیں۔
اس لئے ان کے متناظر ضلعے متناسب ہیں

پس △ ب د ا اور △ ب ا ج متشابہ ہیں
اسی طرح سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ △ ا د ج اور △ ب ا ج متشابہ ہیں۔
اب چونکہ مثلثوں ب د ا، ا د ج کے زاوئے جداگانہ مثلث ب ا ج کے زاویوں کے مساوی ہیں، اس لئے یہ باہم متساوی الزوایا ہیں، یعنی یہ متشابہ ہیں۔

نتیجۂ صریح (۱) مثلث د ب ا اور د ا ج متشابہ ہیں
اسلئے د ب : د ا = د ا : د ج
یعنی د ا خطوط د ب اور د ج کے درمیان وسط تناسب ہے
اس لئے د ا^۲ = د ب × د ج
(۲) چونکہ مثلث ب ج ا، ب ا د متشابہ ہیں
اس لئے ب ج : ب ا = ب ا : ب د
اس لئے ب ا^۲ = ب ج × ب د
(۳) چونکہ مثلث ج ب ا، ج د ا متشابہ ہیں
اس لئے ج ب : ج ا = ج ا : ج د
اس لئے ج ا^۲ = ج ب × ج د

مشقیں

متفرق مثالیں مسائل (۶۲ - ۶۶) پر

ا۔ متساوی الاضلاع مثلث ا ب ج کا ہر ایک ضلع ا ہے، ضلع ب ج کو دونوں جانب خارج کیا گیا ہے اور اس پر دو نقطے ن اور ق ایسے لئے گئے ہیں کہ ب ن = ج ق = ا، نیز ا ن، ا ق کو ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ

(۱) ن ق : ن ا = ن ا : ن ب
(۲) ن ا^۲ = ۳ ا^۲

۲- مثلث ا ب ج کا زاویہ ا قائمہ ہے، اد ب ج پر عمود نکالا گیا ہے، اگر اب = ۴ ، اج = ۳ تو ثابت کرو کہ وتر کے حصے بالترتیب ۳،۲ اور ۱،۸ ہیں۔

۳- مثلث ا ب ج کا زاویہ ا قائمہ ہے، اور ب ج پر اد عمود نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ (۱) مسئلہ ۲۵ کی مدد سے (۲) مسئلہ ۶۶ کی مدد سے

ب ج × اد = اب × اج

۴- مثلث ا ب ج کا زاویہ ا قائمہ ہے، وتر پر عمود اج نکالا گیا ہے، نیز ج ا، اج کے متوازی کھینچا گیا ہے، اگر اج = ۱۵ سنتی میتر، اب = ۲۰ سنتی میتر تو ثابت کرو کہ اج = ۱۲ سنتی میتر

ج ا = ۹،۶ سنتی میتر

۵- ایک دائرہ کا مرکز ج ہے اور نیم قطر ر، اس کے ایک قطر کے سروں پر دو مماس کھینچے گئے ہیں، محیط کے کسی نقطہ ن پر دائرہ کا تیسرا مماس کھینچا گیا ہے جو ان دو مماسوں کو نقاط ق اور ط پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ

(۱) ق ط کے سامنے ج پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

(۲) ن ق × ن ط = $ر^2$

۶- دو دائرے جن کے نیم قطر $ر_1$ اور $ر_2$ ہیں ایک دوسرے کو خارجاً ا پر مس کرتے ہیں، ایک مشترک مماس ان کو بالترتیب نقاط ن اور ق پر مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ

(۱) ن ق کے سامنے ا پر زاویہ قائمہ بنتا ہے

(۲) $ن ق^2 = ۴ ر_1 ر_2$

[ن ا، ق ا کو بڑھاؤ کہ یہ خطوں سے ل اور م ا پر ملیں، ثابت کرو کہ ن ا م ا، ل ا ق قائم الزاویہ، متشابہ مثلث ہیں]

۷- دو دائرے ایک دوسرے کو خارجاً ا پر مس کرتے ہیں اور ان کا ایک مشترک مماس ن ق مرکزوں کے ملانے والے خط سے س پر ملتا ہے،

ثابت کرو کہ اگر ن ا، ا ق کو ملایا جائے تو

(۱) مثلث س ا ن، س ق ا متشابہ ہیں

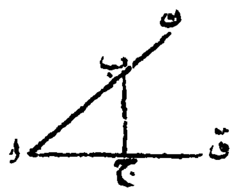
(۲) س ا^2 = س ن × س ق

۸۔ دو دائرے ایکدوسرے کو ا اور ب پر کاٹتے ہیں، ا پر ہر دائرہ کا مماس کھینچا گیا ہے جو دوسرے کے محیط کو بالترتیب ج اور د پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر ب ج، ب د کو ملایا جائے تو

ب ج : ب ا = ب ا : ب د

مثلثی نسبتیں

۱۔ ن ا ق کوئی حادہ زاویہ ہے، اس کی ساق ا ن میں کوئی نقطہ ب لو اور اس سے ا ق پر ب ج عمود نکالو۔



اب مثلث قائم الزاویہ ب ا ج میں جو زاویہ ا ہے اس کے ساتھ ذیل کی تعریفیں منسوب کیجاتی ہیں اور اکثر استعمال ہوتی ہیں

نسبت $\frac{\text{ب ج}}{\text{ا ب}}$ یا $\frac{\text{مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$ کو زاویہ ا کی جیب کہتے ہیں

نسبت $\frac{\text{ا ج}}{\text{ا ب}}$ یعنی $\frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}}$ کو ∠ ا کی جیب التمام کہتے ہیں

نسبت $\frac{\text{ب ج}}{\text{ا ج}}$ یعنی $\frac{\text{مقابل کا ضلع}}{\text{متصل ضلع}}$ کو ∠ ا کا مماس کہتے ہیں

ان نسبتوں کے الٹ یا معکوس بالترتیب زاویہ ا کے قاطع التمام، قاطع اور مماس التمام کہلاتے ہیں۔

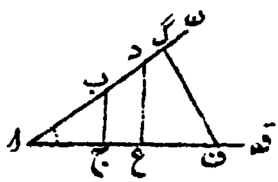
زاویہ ا کی یہ مثلثی (علم مثلثی) نسبتیں ہیں، ان کو بالعموم ذیل کی مختصر شکلوں میں بیان کیا جاتا ہے۔

جب ا = $\frac{\text{ب ج}}{\text{ا ب}}$ ، جم ا = $\frac{\text{ا ج}}{\text{ا ب}}$ ، مس ا = $\frac{\text{ب ج}}{\text{ا ج}}$

قم ا = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}}$ ، قط ا = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}}$ ، مم ا = $\frac{\text{ا ج}}{\text{ب ج}}$

نوٹ۔ ان نسبتوں کے مربعوں (جب ا)^{۲}، (جم ا)^{۲} .... کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں جب^{۲} ا، جم^{۲} ا ....

۲۔ ساتھ کی شکل میں فرض کرو کہ ا ن کے نقاط ب، د سے ا ق پر عمود ب ج، د ع کھینچے گئے ہیں اور فرض کرو کہ ا ق کے نقطہ ف سے ا ن پر عمود ف گ کھینچا گیا ہے۔



مثلث ب ا ج، د ا ع، ف ا گ تینوں متشابہ ہیں۔ اسلئے

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{د ع}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ف گ}}{\text{ا ف}}$$

لیکن ان میں سے ہر ایک نسبت، جب ا کی قیمت کو تعبیر کرتی ہے جبکہ اسے بالترتیب مثلثات ب ا ج، د ا ع، ف ا گ سے حاصل کیا جائے۔

پس جب ا کی قیمت نہیں بدلتی جب تک کہ $\angle$ ا وہی رہتا ہے، اسی طرح کا ثبوت ہر مثلثی نسبت کے لئے دیا جا سکتا ہے، اس سے ظاہر ہے کہ مثلثی نسبت کی قیمت صرف زاویہ کے ناپ پر منحصر ہے اور اسکی ساقوں کے طول پر منحصر نہیں ہے۔

مشقیں

۱۔ مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہے اَ = ۸، بَ = ۱۵، جَ معلوم کرو، نیز جب ا، جم ا، مس ا کی قیمتیں معلوم کرو۔ یہاں اَ، بَ، جَ مثلث کے اضلاع کے طول ہیں۔

۲۔ مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کے گرد کے اضلاع ۲۵ اور ۱۲ ہیں، وتر معلوم کرو اور سب سے چھوٹے زاویہ کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو۔

۳۔ اگر ا حادہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ مسئلہ ۲۹ ذیل کی کوئی ایک شکل اختیار کرسکتا ہے

(۱) جب^۲ ا + جم^۲ ا = ۱ (۲) قط^۲ ا = ۱ + مس^۲ ا

۴۔ ا ب ج د ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے جس میں قطر ا ج ہر دو اضلاع ا ب، ج د پر علی القوائم ہے، اگر ا ب = ۵ء۱ سنتی میٹر ا ج = ۶ء۳ سنتی میٹر، ا د = ۵ء۶ سنتی میٹر ہو تو ان مفروضات کی بنا پر شکل کھینچو اور اسی سے جب ا ب ج، مس ا ج ب، جم ج د ا، مس د ا ج کی قیمتیں معلوم کرو۔

۵۔ اگر ا حادہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جب (۹۰° - ا) = جم ا (۲) مس (۹۰° - ا) = مم ا

۶۔ حادہ زاویہ بناؤ جس کی جیب ۶ء ہو [ملاحظہ ہو مسئلہ علی ۱۰ ترجمہ تکملن صفحہ ۱۷۰]

چاندہ سے زاویہ کو ناپو اور اسکی قیمت قریب ترین درجہ تک لکھو۔

۷۔ ذیل کے معطیات کی بنا پر ہر صورت میں حادہ زاویہ ا بناؤ

(۱) مس ا = ۷ء (۲) جم ا = ۹ء (۳) جب ا = ۱۲ء

ہر صورت میں زاویہ کو قریب ترین درجہ تک ناپو۔

۸۔ حادہ زاویہ ا ایسا بناؤ کہ مس ا = ۶ء۱، زاویہ ا کو ناپو اور پیمائش نیز حساب سے جم ا کی قیمت معلوم کرو۔

۹۔ ذیل کے نتائج ثابت کرو

(۱) جب ۴۵° = جم ۴۵° = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ (۲) جب ۶۰° = جم ۳۰° = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

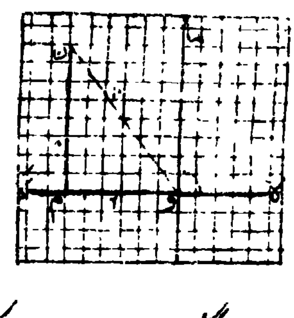
[ملاحظہ ہو مثال ۱۱، صفحہ ۲۵۳، مثال ۱۴ صفحہ ۲۵۶ ترجمہ کملن]

۱۰۔ مثلث ا ب ج بناؤ جس میں زاویہ ج قائمہ ہو، جس کا وتر ۱۰ سنٹی میٹر لمبا ہو اور جس میں مس ا = ۰٫۸۱، ا ج اور زاویہ ا دونوں کو ناپو اور جب ا، جم ا کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۱۔ ذیل کے معطیات کی بنا پر مثلث قائم الزاویہ ا ب ج بناؤ
مس ا = ۰٫۶، ∠ ج = ۹۰°، ب = ۲٫۸ سنٹی میٹر۔
ج اور ∠ ا کو ناپو۔

۳۔ صفحہ ۳۳ پر جو تعریفیں دی گئی ہیں ان کی توسیع زاویہ منفرجہ کی صورت میں اس طرح ہو سکتی ہے۔

فرض کرو لا و لا ایک سیدھا خط ہے اور و ما اس پر عمود وار ہے۔



فرض کرو کہ ایک خط و ن ابتدا میں و لا پر منطبق ہوتا ہے، اس مقام سے شروع ہو کر و کے گرد گھومنے سے یہ زاویہ پیدا کرتا ہے خواہ زاویہ ا حادہ ہو یا منفرجہ یا اس سے بڑا۔

لا و لا پر عمود ن م کھینچو، اس طرح مثلث قائم الزاویہ ن و م پیدا ہوگا۔ اب و ن کا مقام خواہ کچھ ہی ہو یعنی و ن نے اپنے گھومنے سے خواہ کچھ ہی زاویہ پیدا کیا ہو ہم زاویہ ا کی مثلثی نسبتوں کی یہ تعریف کرینگے

$$\text{جب ا} = \frac{\text{ن م}}{\text{و ن}}،\quad \text{جم ا} = \frac{\text{و م}}{\text{و ن}}،\quad \text{مس ا} = \frac{\text{ن م}}{\text{و م}}$$

اور اس میں یہ ملحوظ رکھا جائیگا کہ و م کو مثبت خیال کیا جائے گا جبکہ یہ

و ما کے دائیں جانب ہو اور منفی خیال کیا جائیگا جبکہ یہ بائیں جانب ہو
[ملاحظہ ہو صفحہ ۲۷۱ ترجمہ تکملن]

مثلاً اوپر کی شکل میں

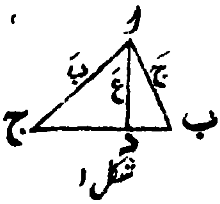
$$\text{جب ا} = \frac{\text{ن م}}{\text{و ن}} = \frac{۸}{۱۰} = \text{۸ر}$$

$$\text{جم ا} = \frac{\text{و م}}{\text{و ن}} = \frac{-۶}{۱۰} = -\text{۶ر}$$

$$\text{مس ا} = \frac{\text{ن م}}{\text{و م}} = \frac{۸}{-۶} = -\frac{۴}{۳}$$

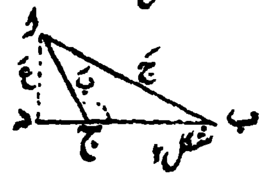
مثال۔ (۱) مثلث کے رائس سے قاعدہ پر کا عمود
(۲) ایک ضلع کا ظل دوسرے ضلع پر
اِن دونوں کو مثلثی نسبتوں کی رقوم میں بیان کرو۔

(۱) ساتھ کی دونوں شکلوں میں



$$\frac{\text{ا د}}{\text{ا ج}} = \text{جب ج}$$ ، ج کی جیب دونوں صورتوں میں مثبت ہے اسلئے

$$\text{عَ} = \text{بَ جب ج}$$



(۲) شکل (۱) میں $$\frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}} = \text{جم ج}$$

شکل (۲) میں بھی $\frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}}$ ، جم ج کو تعبیر کرتا ہے اگر ج د کو منفی خیال کیا جائے اس لئے تعدادًا

$$\text{ج د} = +\,\text{بَ جم ج}$$ شکل (۱) میں

$$\text{ج د} = -\,\text{بَ جم ج}$$ شکل (۲) میں.

بعض ہندسی نتائج کو علم مثلث کے طریق پر بیان کیا گیا ہے۔

[ذیل کی شقوں میں مثال سابق کی تصویروں کا حوالہ دیا گیا ہے]

۱۔ دونوں شکلوں میں عَ = بَ جب ج

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ عَ = جَ جب ب

اسلئے بَ جب ج = جَ جب ب، اسلئے $\frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}}$

اسی طرح سے $\frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}}$

یعنی مثلث کے اضلاع اپنے مقابل کے زاویوں کی جیبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

۲۔ مثلث کی اس خاصیت سے مسئلہ ۶۲ حاصل کرو۔

۳۔ دونوں شکلوں میں

△ ا ب ج کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ ب ج × ا د = $\frac{1}{2}$. اَ عَ

اور عَ = بَ جب ج اسلئے △ = $\frac{1}{2}$ اَ بَ جب ج

اسی طرح سے △ = $\frac{1}{2}$ بَ جَ جب ا = $\frac{1}{2}$ جَ اَ جب ب = $\frac{1}{2}$ اَ بَ جب ج

۴۔ مثلثی نسبتوں کی رقوم میں رقبہ بیان کرو

(۱) متوازی الاضلاع کا جس کے دو متصل ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ تینوں معلوم ہوں۔

(۲) معین کا جس کا ایک ضلع اور ایک زاویہ معلوم ہو۔

۵۔ ثابت کرو کہ مثلث کے حائط دائرہ کا نیم قطر ذیل کے ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{س} = \frac{\text{اَ}}{\text{۲ جب ا}} = \frac{\text{اَ بَ جَ}}{۴\triangle}$$

۶۔ شکل (۱) سے

ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 − ۲ ب ج × ج د مسئلہ ۵۵
شکل ۲ سے

ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 + ۲ ب ج × ج د مسئلہ ۵۴
شکل (۱) سے

ج د = + بَ جم ج اور شکل (۲) سے ج د = − بَ جم ج
پس دونوں صورتوں میں مندرج کرنے سے

جَ^{2} = اَ^{2} + بَ^{2} − ۲ اَ بَ جم ج

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

اَ^{2} = بَ^{2} + جَ^{2} − ۲ بَ جَ جم ا

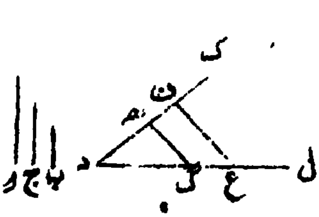
بَ^{2} = جَ^{2} + اَ^{2} − ۲ جَ اَ جم ب

عملی مسائل

عملی مسئلہ ۳۵

تین دئے ہوئے خطوط مستقیم کا چوتھا متناسب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ا، ب، ج تین دئے ہوئے خط ہیں، ان کا چوتھا متناسب مطلوب ہے۔



عمل۔ کسی زاویہ پر دو خطوط مستقیم لاانتہا طول کے کھینچو۔ دل سے کاٹو دگ = ا، گ ع = ب اور ذک سے کاٹو دھ = ج، گ ھ کو ملاؤ۔

ع میں سے ع ف، گ ہ کے متوازی کھینچو، تب ہ ف خطوط ا، ب، ج کا چوتھا متناسب ہوگا۔

ثبوت مثلث د ع ف میں گ ہ ‖ ع ف

اسلئے د گ : گ ع = د ہ : ہ ف

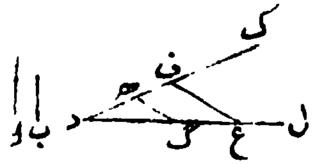
لیکن د گ = ا، گ ع = ب، د ہ = ج

اسلئے ا : ب = ج : ہ ف یعنی ہ ف خطوط ا، ب، ج کا چوتھا متناسب ہے۔

مسئلہ عملی ۳۶

دو دئے ہوئے خطوط مستقیم کا تیسرا متناسب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ا، ب دو خطوط ہیں، ان کا تیسرا متناسب مطلوب ہے۔

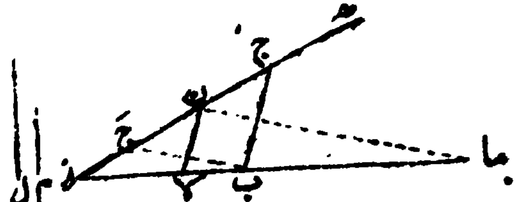


عمل۔ دو خط د ل، د ک کھینچو، د ل سے کاٹو د گ = ا اور گ ع = ب اور د ک سے کاٹو د ہ = ب، گ ہ کو ملاؤ اور ع میں سے ع ف، گ ہ کے متوازی کھینچو، تب ہ ف خطوط ا، ب کا تیسرا متناسب ہوگا۔

ثبوت حسب بالا مسئلہ عملی ۳۵ میں۔

مسئلہ عملی ۳۷

ایک خط مستقیم کو داخلاً اور خارجاً ایک دی ہوئی نسبت سے تقسیم کرو۔



فرض کرو کہ اب خط مستقیم ہے جسکو داخلاً اور خارجاً نسبت ل : م سے تقسیم کرنا مطلوب ہے۔

عمل۔ ا میں سے خط اھ کھینچو جو اب کے ساتھ کوئی زاویہ بنائے اھ سے ان مساوی ل کے کاٹو۔ ن ھ اور ن ا سے بالترتیب ن ج اور ن جَ کاٹو جن میں سے ہر ایک م کے مساوی ہو۔ ب ج، ب جَ کو ملاؤ۔

ن میں سے ن لا متوازی ج ب کے اور ن ما متوازی جَ ب کے کھینچو۔

تب اب کی لا پر داخلا اور ما پر خارجاً نسبت ل : م سے تقسیم ہوتی ہے۔

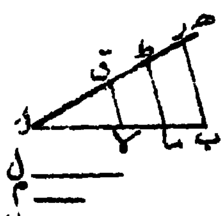
ثبوت۔ (۱) چونکہ △ اب ج میں ن لا، ج ب کے متوازی ہے، اس لئے

ا لا : لا ب = ا ن : ن ج = ل : م

(۲) نیز چونکہ مثلث اب جَ میں ن ما، جَ ب کے متوازی ہے، اس لئے

ا ما : ما ب = ا ن : ن جَ = ل : م

نتیجہ صریح۔ اسی طرح کے عمل سے ایک خط مستقیم اب کو داخلاً ایسے حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جو تین خطوط ل، م، ن کے متناسب ہوں۔

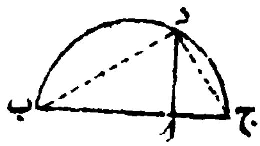


عمل اھ کھینچو اور اس سے کاٹو اق = ل، ق ط = م، ط ر = ن، ر ب کو ملاؤ اور ط، ق میں سے ط ما، ق لا خط ر ب کے متوازی کھینچو۔

تب مربع اک : ل = ک ما : م = ماب : ن

مسئلہ عملی ۳۸

دو دئے ہوئے خطوں کے درمیان وسط تناسب معلوم کرو



فرض کرو کہ ا ب، ا ج دو دئے ہوئے خط ہیں جن کے درمیان وسط تناسب معلوم کرنا ہے۔

عمل۔ ا ب، ا ج کو ایک ہی خط مستقیم میں رکھو اس طرح پر کہ ان کے رخ متقابل سمتوں میں ہوں۔

ب ج پر نصف دائرہ ب د ج بناؤ۔

ا سے ا د، ب ج پر عمود دار کھینچو کہ یہ محیط سے د پر ملے۔

تب ا د خطوط ا ب اور ا ج کے درمیان وسط تناسب ہوگا

ثبوت۔ ب د، د ج کو ملاؤ

∠ ب د ج چونکہ نصف دائرہ میں واقع ہے، اس لئے یہ قائمہ ہے۔

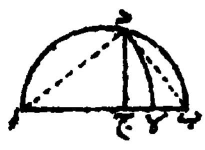
اور چونکہ مثلث قائم الزاویہ ب د ج میں د ا وتر پر عمود دار کھینچا گیا ہے، اسلئے مثلث ا ب د، ا د ج متشابہ ہیں۔ مسئلہ ۶

اس لئے ا ب : ا د = ا د : ا ج

یعنی ا د خطوط ا ب، ا ج کے درمیان وسط تناسب ہے۔

نوٹ اگر ا ب، ا ج کو ایک ہی رخ میں رکھا جائے، تو ذیل کے مفید عمل کے ذریعہ خط ا ب سے ان خطوط کا وسط تناسب یوں قطع کر سکتے ہیں۔

ا ب پر ایک نصف دائرہ بناؤ اور ج سے ج د، ا ب پر



عمود دا کھینچو کہ یہ محیط سے د پر ملے، اب سے الا مساوی اد کے کاٹو۔ تب الا خطوط اب، اج کے درمیان وسط متناسب ہوگا۔

مثلث اب د، ا د ج متشابہ ہیں مسئلہ ۶۲

اسلئے اب : اد = اد : اج

یعنی اب : الا = الا : اج

دوسرے درجے کے اصم کی ترسیمی یا ہندسی طریق پر قیمت نکالنا

مثال۔ (۱) $\sqrt{۵}$ (۲) $\sqrt{۲۱}$ کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

(۱) $\sqrt{۵} = \sqrt{۱ \times ۵}$ کسی مناسب اکائی کی رقوم میں ۵ اور ۱ کو بالترتیب اب اور اج کے مساوی لو اور ان کے درمیان وسط متناسب معلوم کرو۔

چونکہ اب : اد = اد : اج اسلئے $اد^2$ = اب × اج = ۵ × ۱ = ۵

اسلئے اد = $\sqrt{۵}$

اد کو ناپنے سے $\sqrt{۵}$ کی قیمت تقریباً ۲٫۲۴ معلوم ہوتی ہے۔

(۲) $\sqrt{۲۱} = \sqrt{۳ \times ۷}$، یہاں اب، اج کو بالترتیب ۷ سنتی میٹر اور ۳ سنتی میٹر کے مساوی لو اور پہلے کی طرح عمل کرو۔

نوٹ۔ اجزائے ضربی اس طرح منتخب کئے جائیں کہ اب، اج کے مناسب طول ہوں مثلاً $\sqrt{۲۳} = \sqrt{۱۰ \times ۲٫۳}$، $\sqrt{۱۱} = \sqrt{۵ \times ۲٫۲}$

تعریف

اگر ایک خط کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کیا جائے کہ تمام خط کو بڑے حصے کے ساتھ

جو نسبت ہو وہ بڑے حصے کو چھوٹے حصے کے ساتھ ہو تو ایسی تقسیم کو

ہم انتہائی اور وسطی تقسیم کہینگے۔

ب لا ا

مثلاً اب کی لا پر انتہائی اور وسطی نسبت سے تقسیم ہوگی اگر

اب : الا = الا : لاب

جس سے ظاہر ہے کہ اب × لاب = $الا^2$

یعنی کل خط اور ایک حصہ کی سطح دوسرے حصہ کے مربع کے مساوی ہے۔ پس کسی خط کو مسئلہ عملی ۳۳ کی مدد سے انتہائی اور وسطی نسبت سے تقسیم کر سکتے ہیں۔ عمل اور ثبوت کے لئے دیکھو [حصہ چہارم مسئلہ عملی ۳۳]

مشقیں

۱۔ ہندسی طریق پر (۱) ۲ء۴، ۵ء۱، ۶ء۱ کا چوتھا متناسب معلوم کرو۔
(۲) ۲ء۵، ۵ء۱ کا تیسرا متناسب معلوم کرو۔
(۳) ۲ء۲ سنتی میتر اور ۵ء۱۰ سنتی میتر کا وسط متناسب معلوم کرو اور حساب سے اپنے نتائج کی جانچ کرو۔

۲۔ ۱۰ء۲ لمبے خط کو داخلاً اور خارجاً نسبت ۷ : ۳ سے تقسیم کرو اور ہر صورت میں حصوں کے طول پیمائش اور حساب سے معلوم کرو۔

۳۔ تناسب کے مندرجہ ذیل بیانات میں نامعلوم مقدار کی قیمتیں خالص ہندسی طریق پر معلوم کرو۔ اور حساب سے اپنے نتائج کی جانچ کرو۔
(۱) ۱ء۲۵ : لا = ۱ء۶۰ : ۱ء۶۶ [۱ کو طول کی اکائی مانو]
(۲) لا : ۲ء۴ = ۲ء۱ : ۳ء۶ [۱ سنتی میتر کو طول کی اکائی مانو]
(۳) لا : ۱۲ = ۲۵ : لا [۱ کو ۱۰ کے مساوی لو]

۴۔ ۷ء۲ سنتی میتر لمبے خط کو تین حصوں میں تقسیم کرو جو ۲، ۳، ۴ کے متناسب ہوں اپنے عمل کی پیمائش اور حساب سے جانچ کرو۔

۵۔ ۳ء۹ انچ لمبا ایک خط ہے، اس کو تین حصوں میں تقسیم کرو اس طرح کہ دوسرا حصہ = پہلے کا $\frac{۲}{۳}$، اور تیسرا = دوسرے کا $\frac{۳}{۴}$

۶۔ ۵ء۱ انچ لمبے ضلع پر مستطیل بناؤ جس کا رقبہ ۲ انچ ضلع والے مربع کے مساوی ہو، مستطیل کے دوسرے ضلع کی پیمائش کرو۔

۷۔ ترسیمی طریق پر ذیل کی اصم مقداروں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

(۱) $\sqrt{۳}$　(۲) $\sqrt{۱۰}$　(۳) $\sqrt{\frac{۱۴}{۵}}$

۸۔ ہندسی عمل سے ذیل کے جملات کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو اور ہر صورت میں اپنے نتیجہ کی حساب سے تصدیق کرو۔

(۱) $\frac{۲ء۴ \times ۳ء۵}{۲ء۸}$　(۲) $\frac{۶ء۸۴}{۲ء۱۳}$　(۳) $\frac{۱ء۲۶ \times ۲ء۷۱}{۱ء۵۱}$

۹۔ ذیل کے معطیات میں سے ہر ایک کی بنا پر مثلث ا ب ج بناؤ اور ہر صورت میں اس کے اضلاع کے طول محسوب کرو اور انکو ناپو

(۱) محیط = ۴ء۸ انچ اور $\frac{اَ}{۳} = \frac{بَ}{۴} = \frac{جَ}{۵}$

(۲) محیط = ۱۱ء۱ سنتی میتر اور اَ = $\frac{۵}{۹}$ بَ، بَ = $\frac{۴}{۵}$ جَ

(۳) محیط = ۱۱ء۸ سنتی میتر اور $\frac{ا}{۱} = \frac{ب}{۲} = \frac{ج}{۳}$

(۴) اَ = ۳ء۰ انچ، ∠ا = ۹۰° اور ب : ج = ۵ : ۳

مشقیں

[بلندیوں اور فاصلوں کے محسوب کرنے میں تناسب کا استعمال]

۱۔ ایک خاکہ میں ایک کھیت مثلث ا ب ج سے تعبیر ہوتا۔

جس میں و ق = ۸ سنتی میٹر، ب ق = ۶۰۵ سنتی میٹر، ج ق = ۶۰۴ سنتی میٹر اگر کھیت کا سب سے بڑا ضلع ۲۰۰ میٹر ہو تو دوسرے ضلعوں کے طول دریافت کرو خاکہ میں کھیت کی ایک باڑ خط ن ق کے ذریعہ دکھائی گئی ہے جو ب ج کے متوازی ہے اور ایسے نقطہ ن میں سے گذرتی ہے جو ا ب میں نقطہ ا سے ۴۰۰ سنتی میٹر کے فاصلہ پر ہے، باڑ کا طول معلوم کرو۔

۲۔ ا اور ب کی رفتاروں میں نسبت ۸ : ۷ کی ہے، ترسیمی طریق پر معلوم کرو کہ ۰۰ ۸ گز کی دوڑ میں کتنے گز سے ا، ب سے جیت جائیگا اگر دونوں کی رفتار یکساں مانی جائے۔

۳۔ ایک نقشہ میں ۱ً، ۲۵ میل کو تعبیر کرتا ہے، اس پر تین جگہوں ا، ب، ج کا نشان دیا گیا ہے، ان میں سے ب، ا کے شمال مغرب کی جانب ۸ء۱ً پر ہے اور ج، ا کے شمال مشرق کی طرف فاصلہ ۵ء۱ً پر ہے، ب اور ج کے درمیان حقیقی فاصلہ معلوم کرو۔

۴۔ ایک شخص جس کی اونچائی ۶ فٹ ہے ایک قندیل کے کھمبے سے ۲۴ فٹ کے فاصلہ پر کھڑا ہے، وہ دیکھتا ہے کہ قندیل کی وجہ سے اس کا سایہ جو زمین پر پڑتا ہے اس کا طول ۸ فٹ ہے، بتاؤ کہ لیمپ زمین سے کتنا اونچا ہے اور ۵ فٹ اونچے لڑکے کا سایہ جو کھمبے سے ۲۰ فٹ کے فاصلہ پر ہو کتنا لمبا ہوگا۔

۵۔ ایک شخص ۶ فٹ لمبا، ایک قندیل کے کھمبے سے ۱۵ فٹ کے فاصلہ پر کھڑا ہے اور اس کے سایہ کا طول جو قندیل کی روشنی کی وجہ سے زمین پر پڑتا ہے ۵ فٹ ہے، بتاؤ کہ قندیل کی اونچائی کیا ہے اور اگر وہ شخص کھمبے کی جانب ۸ فٹ آگے بڑھے تو اس کے سایہ کا طول کیا ہوگا۔

۶۔ ایک شخص ایک نہر کی چوڑائی معلوم کرنا چاہتا ہے، اس نے نہر کے ایک کنارے پر ½۴ فٹ اونچی سلاخ نصب کی، پھر وہ اس کنارے سے عموداً اتنا فاصلہ پیچھے ہٹا کہ سلاخ کی چوٹی اور مقابل کا کنارہ مین ایک خط مستقیم میں دکھائی دیں۔ اگر اس کی آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ۸ انچ ہو

اور اس کا فاصلہ نزدیک کے کنارہ سے ۲۰ فٹ ہو تو نہر کی چوڑائی دریافت کرو۔

۷۔ ایک برج کی بلندی معلوم کرنے کے لئے ایک شخص نے ۱۲ فٹ اونچا جھنڈا برج سے ۲۷ فٹ کے فاصلہ پر انتصاباً کھڑا کیا، پھر وہ بلحاظ برج کے جھنڈے سے ۳ فٹ پرے ہٹا اور اس نے دیکھا کہ جھنڈے اور برج کی چوٹیاں ایک ہی سیدھ میں ہیں، اگر اس کی آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ۴ انچ ہو تو برج کی بلندی معلوم کرو۔

۸۔ ایک روشنی گھر کے جنوب میں ایک شخص کھڑا ہے اور وہ دیکھتا ہے کہ اس کا سایہ جو کہ روشنی کی وجہ سے ۲۴ فٹ لمبا ہے، مشرق کی طرف ... اگر جانب ... سایہ کا طول ۳۰ فٹ ہو جاتا ہے، اگر اس کی اپنی اونچائی ۶ فٹ ہو تو سطح زمین سے روشنی کی بلندی معلوم کرو۔

متشابہ اشکال

مسئلہ اثباتی ۶۷

متشابہ کثیرالاضلاع متشابہ مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم ہو سکتے ہیں، اور ہر شکل میں متناظر راسوں کو جو خط ملاتے ہیں وہ متناسب ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب ج د ھ، ف ک گ ل م دو متشابہ کثیرالاضلاع ہیں راس ا، راس ف کا جواب ہے، ب، ک کا وغیرہ وغیرہ۔ ا ج، ا د کو نیز ف گ، ف ل کو ملایا گیا ہے۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ (۱) مثلث ا ب ج، ف ک گ متشابہ ہیں نیز ا ج د اور ف گ ل متشابہ ہیں، ا د ھ اور ف ل م متشابہ ہیں (۲) ا ب : ف ک = ا ج : ف گ = ا د : ف ل

ثبوت (۱) چونکہ کثیرالاضلاع متشابہ ہیں، اسلئے ∠ ا ب ج = ∠ ف ک گ

اور ا ب : ف ک = ب ج : ک گ

اسلئے △ ا ب ج اور ف ک گ متشابہ ہیں مسئلہ ۶۴

اسلئے ∠ ب ج ا = ∠ ک گ ف

لیکن چونکہ کثیرالاضلاع متشابہ ہیں اس لئے

∠ ب ج د = ∠ ک گ ل، اسلئے ∠ ا ج د = ∠ ف گ ل

نیز ا ج : ف گ = ب ج : ک گ کیونکہ △ ا ب ج، ف ک گ متشابہ ہیں

= ج د : گ ل کیونکہ کثیرالاضلاع متشابہ ہیں۔

یعنی زاویہ ا ج د اور ف گ ل کے گرد کے اضلاع متناسب ہیں۔

اسلئے △ اجد ، ف گ ل متشابہ ہیں مسئلہ ۶۴

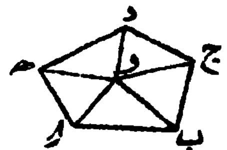
اسی طرح سے ثابت ہوسکتا ہے کہ △ ادھ ، ف ل م متشابہ ہیں

(۲) اور اب : فک = اج : ف گ ، متشابہ مثلثوں اب ج اور ف ک گ سے

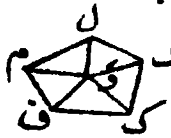
= اد : ف ل ، متشابہ مثلثوں ج اد

اور گ ف ل سے ۔

نوٹ ۔ اوپر کے مسئلہ میں دو متناظر راسوں میں سے خط کھینچنے سے کثیر الاضلاعوں کو متشابہ مثلثوں میں تقسیم کیا گیا ہے، لیکن یہ قید ضروری نہیں ۔



کثیر الاضلاع اب ج د ھ میں کوئی نقطہ و لو اور اسے ہر راس کے ساتھ ملاؤ ۔



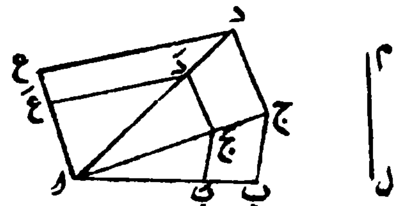
کثیر الاضلاع ف ک گ ل م میں ∠ ک ف وَ کو ∠ ب او کے مساوی بناؤ اور ∠ ف ک وَ کو ∠ اب و کے مساوی بناؤ

وَ کو کثیر الاضلاع ف ک گ ل م کے ہر راس کے ساتھ ملاؤ ۔

طالب علم اسے بطور مشق کے ثابت کرے کہ اس طرح سے دونوں کثیر الاضلاع متشابہ مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم ہو جاتے ہیں ۔

مسئلہ عملی ۳۹ [پہلا طریقہ]

ایک ضلع پر جس کا طول دیا گیا ہے ایک شکل بناؤ جو ایک معلوم مستقیم الاضلاع شکل کے متشابہ ہو ۔



فرض کرو کہ اب ج د ع دی ہوئی شکل ہے اور ل م معلومہ ضلع کا طول ہے، فرض کرو کہ اس ضلع کو اب کا جواب ہونا مقصود ہے۔

عمل۔ اب سے ابَ، ل م کے مساوی کاٹو، اجَ، اد کو ملاؤ،
بَ سے بَ جَ، ب ج کے متوازی کھینچو کہ یہ اج سے جَ پر ملے۔
جَ سے جَ دَ، ج د کے متوازی کھینچو کہ یہ اد سے دَ پر ملے
دَ سے دَ عَ، د ع کے متوازی کھینچو کہ یہ اع سے عَ پر ملے۔
تب ا بَ جَ دَ عَ مطلوبہ شکل ہوگی۔

ثبوت کا خاکہ۔ (۱) عمل کی رو سے اشکال ا بَ جَ دَ عَ، اب ج د ع متساوی الزوایا ہیں۔

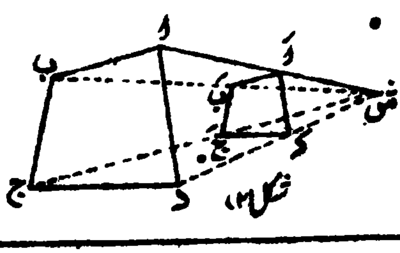
(۲) متشابہ مثلثوں کے تین جوڑوں سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{ابَ}}{\text{اب}} = \frac{\text{بَ جَ}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{جَ دَ}}{\text{ج د}} = \frac{\text{دَ عَ}}{\text{د ع}} = \frac{\text{عَ ا}}{\text{ع ا}}$$

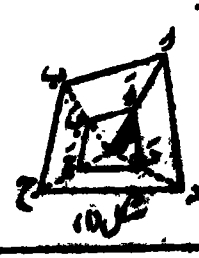
یعنی کثیر الاضلاعوں کے متناظر ضلعے متناسب ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶۸

کوئی دو متشابہ مستقیم الاضلاع اشکال اس طرح رکھی جا سکتی ہیں کہ متناظر راسوں کے ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گذریں۔



شکل (۲)



شکل (۱)

فرض کرو کہ اب ج د اور اَبَ جَ دَ متشابہ اشکال ہیں۔
چونکہ ∠ دَ بَ = ∠ د ب اس لئے شکلوں کو اس طرح رکھا جا سکتا ہے کہ اَبَ، بَ جَ بالترتیب متوازی ہوں اب، ب ج کے۔ نیز چونکہ شکلیں متساوی الزوایا ہیں، اسلئے ظاہر ہے کہ جَ دَ متوازی ہے ج د کے اور دَ اَ متوازی ہے د ا کے۔

اب یہ ثابت کرنا ہے کہ جب دی ہوئی اشکال کے متناظر اضلاع متوازی ہوں تو ا اَ، ب بَ، ج جَ، د دَ ہم نقطہ ہوں گے۔

ا اَ کو ملاؤ اور اس کو خارجاً ش پر نسبت اب : اَبَ سے تقسیم کرو، ش ب اور ش بَ کو ملاؤ۔ ہم یہ ثابت کریں گے کہ ش ب اور ش بَ دونوں ایک ہی خط میں واقع ہیں۔

ثبوت۔ مثلثوں ش اب، ش اَبَ میں چونکہ اب اور اَبَ متوازی ہیں اسلئے ∠ ش اب = ∠ ش اَبَ

اور از روئے عمل ش ا : ش اَ = اب : اَبَ

اسلئے مثلث ش اب، ش اَبَ متساوی الزوایا ہیں مسئلہ ۴۲

اس لئے ∠ ا ش ب = ∠ اَ ش بَ

اس لئے ش ب اور ش بَ ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہیں یعنی ب بَ ثابت نقطہ ش میں سے گذرتا ہے۔

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ج جَ، د دَ نقطہ ش میں سے گذرتے ہیں۔

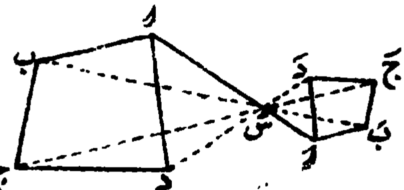
یعنی ا اَ، ب بَ، ج جَ، د دَ ہم نقطہ ہیں۔

نوٹ یہ قابل توجہ ہے کہ خط ا اَ، ب بَ، ج جَ، د دَ سب نقطۂ ش میں سے گذرتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کی نقطہ ش پر اشکال کے کسی دو متناظر اضلاع کی نسبت سے خارجاً تقسیم ہوتی ہے۔

نوٹ۔ اشکال کو اس طرح رکھنے میں کہ اَبَ، بَ جَ بالترتیب اب، ب ج کے متوازی ہوں دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں

(۱) اَبَ اور اب کا رخ ایک ہی ہو جیسے اشکال ۱ اور ۲ میں

(۲) اَبَ اور اب کے رخ متقابل ہوں ملاحظہ ہو شکل ۳ -



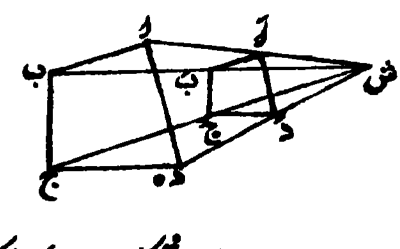
شکل ۳

موخرالذکر صورت میں بھی ہم دیکھینگے کہ جَ دَ متوازی ہے ج د کے اور دَ اَ متوازی ہے د ا کے اور یہ پہلے کی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ ا اَ، ب بَ، ج جَ، د دَ ہم نقطہ ہیں- لیکن اس صورت میں ش، ا اَ کو متناظر اضلاع کی نسبت میں داخلاً تقسیم کرتا ہے اور شکلوں کا محل بلحاظ ایک دوسرے کے آڑا ہوگا -

ہر صورت میں ش کو تشابہ یا ہم وضعیت کا مرکز کہتے ہیں اور متشابہ اشکال جو اس طرح رکھی جائیں ہم وضع کہلاتی ہیں -

مسئلہ عملی ۳۹ [دوسرا طریقہ]

دئے ہوئے ضلع پر ایک شکل کھینچو جو ایک اور معلومہ شکل کے متشابہ ہو -



فرض کرو کہ اب ج د معلومہ شکل ہے، اَبَ دیا ہوا ضلع ہے اور اَبَ کو ضلع اب کا جواب ہونا مقصود ہے -

عمل ۔ اَبَ کو اب کے متوازی رکھو اور اَاَ ، ب بَ کو ملاؤ اور انہیں بڑھاؤ کہ یہ ش پر ملیں ۔
ش ج ، ش د کو ملاؤ ۔
بَ میں سے بَ جَ ، ب ج کے متوازی کھینچو کہ یہ ش ج سے جَ پر ملے
جَ میں سے جَ دَ ، ج د کے متوازی کھینچو کہ یہ ش د سے دَ پر ملے
اَدَ کو ملاؤ ، تب اَبَ جَ دَ مطلوبہ شکل ہوگی ۔
طالب علم ثابت کرے کہ (۱) اَبَ جَ دَ اور اب ج د متساوی الزوایا ہیں (۲) ان شکلوں کے متناظر ضلعے متناسب ہیں
یہ ثبوت مسئلہ ۹۸ کا عکس ہے ۔

متشابہ اشکال پر مشقیں

(عددی اور ترسیمی)

۱ ۔ ایک قاعدہ اب ، ۶٫۵ سنتی میٹر لمبا ہے ، ذیل کے معطیات کی بنا پر ذو اربعۃ الاضلاع اب ج د بناؤ
∠ ا = ۸۰° ، ∠ ب = ۷۰° ، ا د = ۴٫۴ سنتی میٹر ، ب ج = ۳٫۲ سنتی میٹر
کسی مناسب نقطہ کو مرکز تشابہ مانکر
(۱) اب ج د کی چھوٹی تشبیہ بناؤ ایسی کہ اسکے ہر ضلع کی نسبت اب ج د کے متناظر ضلع کے ساتھ ۳ : ۴ ہو ۔
(۲) اب ج د کی بڑی تشبیہ بناؤ ایسی کہ ہر ضلع کی نسبت اب ج د کے متناظر ضلع کے ساتھ ۵ : ۴ ہو ۔
۲ ۔ دئے ہوئے قطر اب پر ایک نیم دائرہ بناؤ ۔ اِس کے اندر ایک مربع بناؤ جسکے دو راس دائرہ کی قوس پر ہوں اور باقی دو اب پر
اگر اب = ۲ ر اور مربع کا ضلع ا ہو تو ثابت کرو کہ ۵ اُ = ۴ رُ
۳ ۔ ۲٫۴ نیم قطر کا ایک قطاع دائرہ بناؤ جس کا مرکزی زاویہ ۹۰° ہو
اس کے اندر ایک مربع بناؤ ۔

اگر قطاع کا نیم قطر ر ہو، مربع کا ضلع ا ہو تو پیمائش سے نسبت ا : ر معلوم کرو۔

۴۔ ایک قطاع دائرہ کا نیم قطر ۵ سنتی میٹر ہے اور مرکزی زاویہ ۴۵° ہے، اسکے اندر مستطیل بناؤ جس کے اضلاع کی نسبت ۲ : ۱ ہو۔ ثابت کرو کہ ایسے دو مستطیل بن سکتے ہیں اور پیمائش سے ان کے بڑے ضلعوں کا مقابلہ کرو۔

۵۔ مثلث ا ب ج بناؤ جس میں ا ج = ۸ سنتی میٹر، ا ب = ۷ سنتی میٹر، ب ج = ۶ سنتی میٹر، راس ا کو مرکز تشابہ مانتے ہوئے مثلث کے اندر مربع بناؤ اس طرح پر کہ اس کے دو راس قاعدہ ب ج پر واقع ہوں اور باقی دو بالترتیب ا ب اور ا ج پر ہوں۔

۶۔ مثلث ا ب ج بناؤ جس میں ا ج = ۲.۱۶"، ب = ۱۱۰°، ج = ۳۵°۔ مثلث ا ب ج میں مثلث متساوی الاضلاع بناؤ

(۱) جس کا ایک ضلع ب ج کے متوازی ہو

(۲) جس کا ایک ضلع ایک دئے ہوئے خط کے متوازی ہو۔

۷۔ مثلث ا ب ج کے اندر ایک مثلث بناؤ جو ایک دئے ہوئے مثلث د ع ف کے متشابہ ہو۔
بتاؤ کہ یہ عمل کتنی طرح سے ہو سکتا ہے۔

۸۔ ضلع ۲.۱ انچ پر منتظم مسدس ا ب ج د ع ف بناؤ اور اسکے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو ضلعے ا ب اور د ع کے متوازی ہوں اور اس کے راس مسدس کے باقی اضلاع پر واقع ہوں۔

مسئلہ اثباتی ۶۹ [اقلیدس م ۶ ش ۳۳]

مساوی دائروں میں مرکز پر کے یا محیط پر کے زاویوں کی باہمی نسبت وہی ہوتی ہے جو اُن قوسوں کی نسبت ہو جن پر وہ قائم ہیں۔



فرض کرو کہ اب ع ، ج د ف مساوی دائرے ہیں اور زاوئے زیر بحث مرکز پر اگ ب ، ج ھ د ہیں اور محیط پر اع ب اور ج ف د جو بالترتیب قوس اب اور ج د پر قائم ہیں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ

(۱) ∠ اگ ب : ∠ ج ھ د = قوس اب : قوس ج د

(۲) ∠ اع ب : ∠ ج ف د = قوس اب : قوس ج د

ثبوت۔ فرض کرو کہ قوس اب : قوس ج د = م : ن

یعنی اگر قوس اب کو م مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو قوس ج د ایسے ن مساوی حصوں میں تقسیم ہو سکتی ہے

ہر دائرہ میں فرض کرو کہ قوسوں اب ، ج د کے نقاط تقسیم تک نیم قطر کھینچے گئے ہیں۔

تب چونکہ زاوئے اگ ب ، ج ھ د مساوی دائروں میں واقع ہیں اور انکو ایسے زاویوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو مساوی قوسوں پر قائم ہیں اسلئے یہ سب زاوے باہم مساوی ہیں۔

ایسے چھوٹے مساوی زاوئے زاویہ اگ ب کے اندر م ہیں اور زاویہ ج ھ د کے اندر ن ہیں۔

اسلئے ∠ اگ ب : ∠ ج ھ د = م : ن

پس ∠ اگ ب : ∠ ج ھ د = قوس اب : قوس ج د

اور چونکہ ∠ اع ب = ∠ اگ ب کا نصف

اور ∠ ج ف د = ∠ ج ھ د کا نصف

اسلئے ∠ ا ع ب : ∠ ج ف د = قوس ا ب : قوس ج د

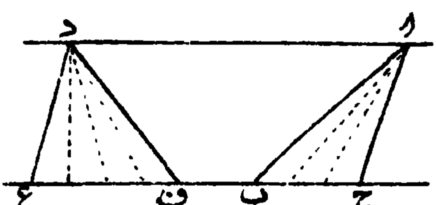
نتیجہ صریح ۔ چونکہ مساوی دائروں میں ایسے قطاع جن کے مرکزی زاوئے مساوی ہوں خود مساوی ہوتے ہیں [مسئلہ ۴۲ نتیجہ صریح]
اسلئے حسب بالا ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ

قطاع ا گ ب : قطاع ج ھ د = قوس ا ب : قوس ج د

تناسب رقبوں سے متعلق

مسئلہ اثباتی ۶۷ [اقلیدس م ۶ ش ۱]

جن مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہوں ان کے رقبوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو اِن کے قاعدوں میں ہے ۔



فرض کرو کہ ا ب ج ، د ع ف دو مثلث ہیں جن کے ارتفاع مساوی ہیں اور اِن کے قاعدے ب ج ، ع ف ہیں ۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ

△ ا ب ج : △ د ع ف = ب ج : ع ف

ثبوت ۔ مثلثوں کو اس طرح رکھو کہ قاعدے ب ج اور ع ف ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہوں اور دونوں مثلث خط کے ایک ہی جانب ہوں ۔
ا د کو ملاؤ تب ا د ، ب ف کے متوازی ہوگا ۔ [تعریف ۲ ، صفحہ ۲۰۲ ترجمہ تکملہ

فرض کرو کہ قاعدہ ب ج : قاعدہ ع ف = م : ن یعنی اگر ضلع
ب ج کو م مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ع ف کو ایسے
ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا جا سکے گا۔

ہر مثلث میں فرض کرو کہ راس سے ب ج ' ع ف کے نقاط تقسیم تک
خطوط کھینچے گئے ہیں۔

اب مثلثوں ا ب ج اور د ع ف کو ایسے مثلثوں میں تقسیم
کیا گیا ہے جن کے ارتفاع مساوی ہیں اور جو مساوی قاعدوں پر قائم ہیں
اس لئے یہ سب مثلث مساوی ہیں۔

△ ا ب ج میں ایسے چھوٹے مساوی مثلثوں کی تعداد م ہے
اور △ د ع ف میں تعداد ن ہے۔

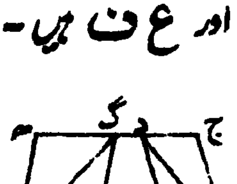
اسلئے △ ا ب ج : △ د ع ف = م : ن

اسلئے △ ا ب ج : △ د ع ف = ب ج : ع ف

نتیجہ صریح ۔ جن متوازی الاضلاعوں کے ارتفاع مساوی ہوں انکے رقبوں
میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے قاعدوں میں۔

فرض کرو کہ ا ج اور ف ھ متوازی الاضلاع ہیں، ان کے ارتفاع
مساوی ہیں اور ان کے قاعدے بالترتیب ا ب اور ع ف ہیں۔

ب د، ع گ کو ملاؤ



چونکہ متوازی الاضلاع
ا ج = دوچند △ ا ب د
اور متوازی الاضلاع ف ھ = دوچند △ ع ف گ

اسلئے متوی الاضلاع ا ج : متوازی الاضلاع ف ھ
= △ ا ب د : △ ع ف گ
= ا ب : ع ف

مسئلہ ۰، کا متبادل ثبوت

فرض کرو کہ مثلثوں ا ب ج ' د ع ف میں سے ہر ایک کا ارتفاع ع

$\triangle$ ا ب ج کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ قاعدہ × ارتفاع = $\frac{1}{2}$ ب ج × عَ

$\triangle$ د ع ف کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ قاعدہ × ارتفاع = $\frac{1}{2}$ ع ف × عَ

اسلئے $\frac{\triangle \text{ا ب ج}}{\triangle \text{د ع ف}} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{ب ج} \times \text{عَ}}{\frac{1}{2}\,\text{ع ف} \times \text{عَ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ع ف}}$

مشقیں

(عددی)

۱۔ دو مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہیں اور ان کے قاعدے بالترتیب ۶٫۳ اور ۴٫۵ ہیں، اگر پہلے مثلث کا رقبہ $\frac{1}{4}$ ۱۲ مربع انچ ہو تو دوسرے کا رقبہ معلوم کرو۔

۲۔ دو مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہیں اور ان کے رقبوں کی نسبت ۲۴ : ۱۷ ہے، اگر پہلے مثلث کا قاعدہ ۴٫۲ سنٹی میٹر ہو تو دوسرے کا قاعدہ قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۳۔ دو مثلث ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں، انکے قاعدے بالترتیب ۱۶٫۲۰ میٹر اور ۲۰٫۷۰ میٹر ہیں، اگر پہلے مثلث کا رقبہ ۵۰٫۱۲۰۴ مربع میٹر ہو تو دوسرے مثلث کا رقبہ قریب ترین مربع سنٹی میٹر تک معلوم کرو۔

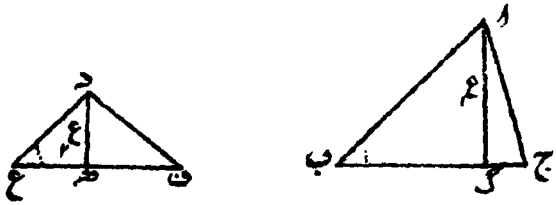
۴۔ دو متوازی الاضلاع جن کے رقبوں کی نسبت ۱٫۲ : ۳٫۵ ہے ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں، اگر پہلے متوازی الاضلاع کا قاعدہ ۶٫۲ ہو تو دوسرے کا قاعدہ معلوم کرو۔

۵۔ دو مثلثی کھیت ایک ہی قاعدہ کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں اور ان کے ارتفاع اس قاعدہ سے ۴٫۲۰ جریب اور ۳٫۱۷ جریب ہیں، اگر پہلے کھیت کا رقبہ ۱۸ ایکڑ ہو تو تمام ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ

اکٹروں میں معلوم کرو۔

مسئلہ اثباتی ۱۔

اگر دو مثلثوں میں ایک کا ایک زاویہ دوسرے کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان کے سب سے مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع کی سطحوں (حاصلضربوں) کے متناسب ہونگے۔



فرض کرو کہ مثلثوں ا ب ج اور د ع ف میں زاویہ ب = زاویہ ع
یہ ثابت کرنا ہے کہ

△ ا ب ج : △ د ع ف = ا ب × ب ج : د ع × ع ف

ا اور د سے مقابل کے اضلاع ب ج، ع ف پر بالترتیب عمود ع۱، ع۲ کھینچو۔

ثبوت۔ △ ا ب ج = ½ ب ج × ع۱، △ د ع ف = ½ ع ف ×

اسلئے $\frac{\text{△ ا ب ج}}{\text{△ د ع ف}} = \frac{\text{ب ج × ع۱}}{\text{ع ف × ع۲}}$ .... (۲)

لیکن چونکہ ∠ب = ∠ع اور ∠گ = ∠ھ، اس لئے

△ ا ب گ اور د ع ھ متساوی الزوایا ہیں — مسئلہ ۱۶

اس لئے $\frac{\text{ع۱}}{\text{ع۲}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{د ع}}$ ...... (۲) — مسئلہ ۱۲

ع۱/ع۲ کی یہ قیمت (۱) میں مندرج کرنے سے ∆ اب ج / ∆ دع ف = (اب × ب ج) / (دع × ع ف)

یا ∆ اب ج : ∆ دع ف = اب × ب ج : دع × ع ف

نتیجہ صریح۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ایسے متوازی الاضلاعوں کے رقبے جن میں سے ایک کا ایک زاویہ دوسرے کے ایک زاویہ کے مساوی ہو، مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع کی مستطیلوں (حاصل ضربوں) کے متناسب ہوتے ہیں۔

رقبوں پر مشقیں

(مسئلہ ۷ پر)

۱۔ یہ مان کر کہ مثلث کا رقبہ = ½ قاعدہ × ارتفاع، ثابت کرو کہ جو مثلث مساوی قاعدوں پر قائم ہوں اُن کے رقبے اُن کے ارتفاعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

نیز اس نتیجہ کو ہندسی طریق پر مسئلہ ۷ سے حاصل کرو۔

۲۔ مثلث اب ج کے قاعدہ ب ج کے متوازی خط لا ما کھینچا گیا ہے جو اضلاع اب اور اج کو بالترتیب لا اور ما پر قطع کرتا ہے۔ ب ما اور ج لا کو ملاؤ اور مسئلہ ۷ کے ذریعہ ثابت کرو کہ (۱) ا لا : لا ب = ا ما : ما ج

(۲) اب : ا لا = اج : ا ما

ثابت کرو کہ ذوار بعۃ الاضلاع کے قطر اس کو ایسے چار مثلثوں [illegible] جن کے رقبے متناسب ہوتے ہیں۔

[illegible] کے رقبے مساوی ہیں اور یہ ایک ہی متوازی [illegible] میں ہیں ثابت کرو کہ قاعدوں کے متوازی کوئی [illegible]

[illegible] گئے ہیں۔

(مسئلہ ۱۷ پر)

۵- دو مثلثوں اب ج، د ع ف میں ∠ب = ∠ع اور اب = ۲٫۷″، ب ج = ۳٫۵″، د ع = ۲٫۱″، ع ف = ۱٫۸″ ثابت کرو کہ

△اب ج : △د ع ف = ۵ : ۲

۶- مثلث اب ج اور د ع ف رقبہ میں مساوی ہیں، ∠ب = ∠ع، اگر اب = ۵٫۶ سنٹی میٹر، ب ج = ۹٫۳ سنٹی میٹر، د ع = ۱۲٫۷ سنٹی میٹر تو ع ف معلوم کرو۔

۷- دو متوازی الاضلاعوں اب ج د، ع ف گ ھ میں ∠ب = ∠ف اور ان کے رقبوں کی نسبت ۳ : ۴ ہے، اگر اب = ۸٫۴ سنٹی میٹر، ب ج = ۱۳٫۵ سنٹی میٹر، ع ف = ۱۰٫۸ سنٹی میٹر، تو ف گ کا طول معلوم کرو۔

اگر ا اور ع سے ب ج اور ف گ پر کے عمودوں کے طول بالترتیب ع۱، ع۲ ہوں تو ثابت کرو کہ ع۱ : ع۲ = ۴ : ۹۔

۸- یہ ضابطہ ثابت کرو۔ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ اَ بَ جیب ج

اور اس سے مسئلہ ۱۷ حاصل کرو۔

۹- △اب ج = △د ع ف بلحاظ رقبہ اور اب : د ع = ع ف : ب ج، ثابت کرو کہ زاوئے ب اور ع یا باہم مساوی ہیں یا ایک دوسرے کے تکملہ۔

۱۰- کوئی خط مثلث اب ج کے ضلعوں اب اور اج کو بالترتیب ن اور ق پر کاٹتا ہے، ن ج کو ملانے اور مسئلہ ۷ کو دو بار لگانے سے ثابت کرو کہ

△ا ن ق : △اب ج = ا ن × ا ق : اب × اج

اس سے مسئلہ ۱۷ کا متبادل ثبوت حاصل کرو۔

مسئلہ اثباتی ۲۷ [اقلیدس م ۶ ش ۱۹]

متشابہ مثلثوں کے رقبے اُن کے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب ج، د ع ف متشابہ مثلث ہیں اور ب ج، ع ف اِن کے متناظر اضلاع ہیں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$\triangle\,\text{ا ب ج} : \triangle\,\text{د ع ف} = \text{ب ج}^2 : \text{ع ف}^2$$

ا اور د سے اضلاع ب ج اور ع ف پر بالترتیب عمود نکالے گئے ہیں، اِن کے طول فرض کرو کہ ع_1 اور ع_2 ہیں۔

ثبوت

$$\triangle\,\text{ا ب ج} = \tfrac{1}{2}\,\text{ب ج} \times \text{ع}_1 ،\quad \triangle\,\text{د ع ف} = \tfrac{1}{2}\,\text{ع ف} \times \text{ع}_2$$

اس لئے

$$\frac{\triangle\,\text{ا ب ج}}{\triangle\,\text{د ع ف}} = \frac{\text{ب ج} \times \text{ع}_1}{\text{ع ف} \times \text{ع}_2} \quad \ldots\ldots (1)$$

لیکن چونکہ متشابہ مثلثوں ا ب ج، د ع ف سے

$\angle$ ب $=$ $\angle$ ع اور $\angle$ گ $=$ $\angle$ ھ جو دونوں قائمے ہیں

اِس لئے $\triangle$ ا ب گ، د ع ھ متساوی الزوایا ہیں مسئلہ ۱۶

اس لئے

$$\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{ا ب}}{\text{د ع}} \quad \ldots\ldots \text{مسئلہ ۶۲}$$

$= \frac{\text{ب ج}}{\text{ع ف}}$ متشابہ مثلثوں ا ب ج، د ع ف سے

(۱) میں $\frac{\text{اع}}{\text{عم}}$ کی بجائے مندرج کرنے سے

$$\frac{\triangle\ \text{ا ب ج}}{\triangle\ \text{د ع ف}} = \frac{\text{ب ج} \times \text{ب ج}}{\text{ع ف} \times \text{ع ف}} = \frac{\text{ب ج}^2}{\text{ع ف}^2}$$

یا $\triangle\ \text{ا ب ج} : \triangle\ \text{د ع ف} = \text{ب ج}^2 : \text{ع ف}^2$

متشابہ مثلثوں کے رقبوں کے متعلق مشقیں

(عددی اور ترسیمی)

۱۔ مثلث ا ب ج میں قاعدہ کے متوازی خط لا ما کھینچا گیا ہے جو اضلاع ا ب اور ا ج کو بالترتیب لا اور ما پر قطع کرتا ہے اگر ا لا، ا ب کا ایک تہائی ہو تو معلوم کرو کہ △ ا لا ما △ ا ب ج کا کتنواں حصہ ہے۔

۲۔ دو متشابہ مثلثوں کے دو متناظر اضلاع بالترتیب ۳ فٹ ۶ انچ اور ۲ فٹ ۴ انچ ہیں، اگر بڑے مثلث کا رقبہ ۴۵ مربع فٹ ہو تو چھوٹے کا رقبہ معلوم کرو۔

۳۔ مثلث ا ب ج کا رقبہ ۲۵۱۶ مربع سنٹی میٹر ہے، خط لا ما، ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ا ب کو نسبت ۵ : ۳ میں قطع کرتا ہے، مثلث ا لا ما کا رقبہ دریافت کرو۔

۴۔ دو متشابہ مثلثوں کے رقبے بالترتیب ۳۹۲ مربع سنٹی میٹر اور ۲۰۰ مربع سنٹی میٹر ہیں، ان کے متناظر اضلاع کے کسی جوڑے کی نسبت معلوم کرو۔

۵۔ ا ب ج، لا ما ے دو متشابہ مثلث ہیں اور ان

رقبے بالترتیب ۳۲ مربع انچ اور ۶۰ء۵ مربع انچ ہیں، اگر لاما = ۴ء۴ تو متناظر ضلع اب کا طول معلوم کرو۔

۶۔ بتاؤ کہ مثلث ا ب ج میں قاعدہ ب ج کے متوازی خط لاما کس طرح کھینچا جائے کہ ∆ ا لاما کا رقبہ ∆ ا ب ج کے رقبہ کا $\frac{۹}{۱۶}$ ہو۔

(نظری)

۷۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جس کا زاویہ ا قائمہ ہے، ا سے ب ج پر عمود ا د نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ

∆ ب ا د : ∆ ا ج د = ب ا² : ا ج²

۸۔ منحرف ا ب ج د کے اضلاع ا ب، ج د متوازی ہیں اور اس کے قطر و پر تقاطع کرتے ہیں، اگر ا ب، ج د کا دوچند ہو تو مثلث ا و ب کی نسبت مثلث ج و د کے ساتھ معلوم کرو۔

۹۔ مثلث ا ب ج میں قاعدہ ب ج کے متوازی خط لاما کھینچا گیا ہے، اگر

∆ ا لاما : شکل لا ب ج ما = ۴ : ۵

تو ثابت کرو کہ ا لا : لا ب = ۲ : ۱

۱۰۔ ثابت کرو کہ متشابہ مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے

(۱) متناظر ارتفاعوں

(۲) متناظر وسطانیوں

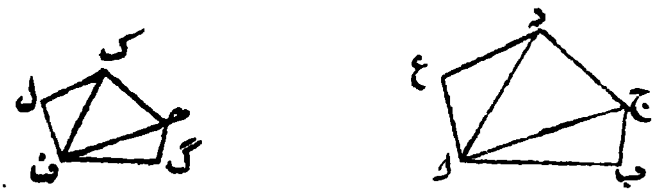
(۳) اندرونی دائروں کے نیم قطروں

(۴) حائط دائروں کے نیم قطروں

کے مربعوں میں ہو۔

مسئلہ اثباتی ۷۳ [اقلیدس م ۶ ش ۲۰]

متشابہ کثیر الاضلاعوں کے رقبے ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب ج د ع، ف گ ھ ک ل متشابہ کثیر الاضلاع اشکال ہیں، اور ا ب، ف گ ان کے متناظر ضلعے ہیں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ

کثیر الاضلاع ا ب ج د ع : کثیر الاضلاع ف گ ھ ک ل = ا ب^2 : ف گ^2

ا ج، ا د، ف ھ، ف ک کو ملاؤ۔

ثبوت۔ △ ا ب ج اور △ ف گ ھ متشابہ ہیں مسئلہ ۶۱

نیز △ ا ج د اور ف ھ ک متشابہ ہیں

نیز △ ا د ع اور ف ک ل متشابہ ہیں

اسلئے △ ا ب ج : △ ف گ ھ = ا ج^2 : ف ھ^2

.... مسئلہ ۷۲

= △ ا ج د : △ ف ھ ک

اسی طرح

△ ا ج د : △ ف ھ ک = ا د^2 : ف ک^2

= △ ا د ع : △ ف ک ل

اسلئے $\frac{\text{△ ا ب ج}}{\text{△ ف گ ھ}} = \frac{\text{△ ا ج د}}{\text{△ ف ھ ک}} = \frac{\text{△ ا د ع}}{\text{△ ف ک ل}}$

اور ان مساوی نسبتوں کے سلسلہ میں مقدموں کے مجموعہ کو موخروں کے مجموعہ کے ساتھ وہی نسبت ہے جو کسی مقدم کو اس کے موخر کے ساتھ ہو۔

مسئلہ ۵ صفحہ

اسلئے شکل اب ج د ع : ف گ ہ ک ل = △ اب ج : △ ف گ ہ

= اب^۲ : ف گ^۲

نتیجہ صریح ۱۔ فرض کرو کہ تین خط تناسب میں ہیں اور وہ اَ، بَ، جَ سے تعبیر ہوتے ہیں یعنی

اَ / بَ = بَ / جَ اسلئے بَ^۲ = اَ جَ



اب فرض کرو کہ اَ اور بَ کو متناظر ضلعے مان کر متشابہ شکلیں ن اور ق کھینچی گئی ہیں تب

شکل ن / شکل ق = اَ^۲ / بَ^۲ = اَ^۲ / اَ جَ = اَ / جَ

پس اگر تین خط تناسب میں ہوں اور پہلے اور دوسرے کو متناظر اضلاع مان کر ان پر متشابہ شکلیں بنائی جائیں تو

پہلے خط پر کی شکل : دوسرے خط پر کی شکل = پہلا خط : تیسرا خط

نتیجہ صریح ۲۔ فرض کرو کہ

اب : ج د = ع ف : گ ہ

نیز فرض کرو کہ اب اور ج د پر متشابہ شکلیں ک اب اور ل ج د بلحاظ ان ضلعوں کے متشابہ طور پر



بنائی گئی ہیں، نیز ع ف اور گ ھ پر متشابہ شکلیں م ف اور ن ھ متشابہ طور پر بنائی گئی ہیں

اب چونکہ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ع ف}}{\text{گ ھ}}$

اس لئے $\frac{\text{ا ب}^2}{\text{ج د}^2} = \frac{\text{ع ف}^2}{\text{گ ھ}^2}$

لیکن شکل ک ا ب : شکل ل ج د = $\text{ا ب}^2 : \text{ج د}^2$

اور شکل م ف : شکل ن ھ = $\text{ع ف}^2 : \text{گ ھ}^2$

اسلئے شکل ک ا ب : شکل ل ج د = شکل م ف : شکل ن ھ

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر چار خط متناسب ہوں اور ان میں سے پہلے اور دوسرے پر متشابہ مستقیم الاضلاع اشکال متشابہ طور پر بنائی جائیں اور اسی طرح تیسرے اور چوتھے خط پر شکلیں بنائی جائیں تو یہ شکلیں متناسب ہوں گی۔

متشابہ اشکال کے رقبوں کے متعلق مشقیں

(عددی اور ترسیمی)

۱- مثلث ا ب ج کے قاعدہ ب ج کے متوازی ایسا خط لا ما کھینچنا مقصود ہے کہ مثلث ا لا ما کا رقبہ مثلث ا ب ج کے رقبہ کا $\frac{۴}{۹}$ واں حصہ ہو۔

۲- مثلث کے ضلعے بالترتیب ۲٫۰ ، ۲٫۵ ، ۲٫۳ ہیں، اس متشابہ مثلث کے اضلاع معلوم کرو جس کا رقبہ اس مثلث کا تین گنا ہو [نتائج انچ کے قریب ترین سو ویں حصہ تک صحیح ہوں]

۳- دو متشابہ شکلوں کے رقبوں کی نسبت ۱۳٫۶۹ : ۱۶٫۸۱ ہے

بڑے کا ارتفاع ۱۰ فٹ ۳ انچ ہے، چھوٹے کا ارتفاع معلوم کرو۔

۴۔ مثلث اب ج کا رقبہ ۱۶ مربع سنٹی میٹر ہے، ب ج کے متوازی خط لا ما کھینچا گیا ہے، نقطہ لا' اب کو نسبت ۳ : ۵ سے تقسیم کرتا ہے، مثلث ب لا ما کا رقبہ دریافت کرو۔

۵۔ خط لا ما مثلث اب ج کے قاعدہ ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ مثلث سے رقبہ کا $\frac{1}{5}$ واں حصہ قطع کرتا ہے لا ما کا طول قریب ترین ملی میٹر تک دریافت کرو۔

۶۔ منتظم مخمس ضلع ۲ء۵" پر بنایا گیا ہے اور اس کا رقبہ $10\frac{3}{4}$ مربع انچ ہے، اس کے متشابہ شکل مخمس کا رقبہ معلوم کرو جو ضلع ۳" پر بنایا جائے۔

۷۔ ایک مستطیلی رقبہ کا طول ۱۰ء۸ میٹر ہے، اس کے ضلعوں کی نسبت ۱۲ : ۵ ہے، دوسرے متشابہ مستطیل کے اضلاع معلوم کرو جس کا رقبہ پہلے مستطیل کے رقبہ کا $\frac{1}{4}$ ہو۔

۸۔ ایک کھیت کے خاکہ میں ۱" ، ۶۶ گز کو تعبیر کرتا ہے، اگر کل خاکہ کا رقبہ ۱۰ مربع انچ ہو تو کھیت کا رقبہ ایکڑوں میں دریافت کرو۔ بتاؤ کہ اس سوال میں کھیت کی شکل کا معلوم ہونا کیوں ضروری نہیں۔

۹۔ ایک جاگیر کا خاکہ شکل ذوار بعۃ الاضلاع اب ج د ہے جسکا پیمانہ ۵" فی میل ہے، اج = ۲۰" اور اج سے ب اور د تک کے عمود بالترتیب ۴ء۲" اور ۶ء۲" ہیں، جاگیر کا رقبہ ایکڑوں میں دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک کھیت کا رقبہ ۸۹ء۱ ہیکٹیر ہے، اس کا خاکہ ایک مثلث ہے جس کے ضلعے ۱۳، ۱۴، ۱۵ سنٹی میٹر ہیں، بتاؤ کہ خاکہ کس پیمانہ پر کھینچا گیا ہے!

متشابہ اشکال کے رقبوں پر مشقیں

(نظری)

مثلث اب ج کا زاویہ د قائمہ ہے، د سے ب ج

عمود ا د نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ

(۱) ب ج^2 : ب ا^2 = ب ج : ب د [مسئلہ ۳، نتیجہ ۱]

(۲) ب ج^2 : ج ا^2 = ب ج : ج د

اس سے حاصل کرو کہ ب ج^2 = ب ا^2 + ا ج^2

۲۔ مثلث ا ب ج کے ضلع ب ج کے متوازی خط لا ما کھینچنے سے اس کی تنصیف کی گئی ہے، نسبت ا لا : ا ب معلوم کرو۔ اس لئے معلوم کرو کہ قاعدہ کے متوازی خط کھینچنے سے مثلث کی کس طرح تنصیف کی جا سکتی ہے۔

۳۔ دو دائروں کا خارجی تماس ا پر ہوتا ہے، ایک مشترک مماس انہیں بالترتیب ب اور ج پر مس کرتا ہے اور مرکزوں کے ملانے خط سے ش پر ملتا ہے، اگر ا ب اور ا ج کو ملایا جائے تو ثابت کرو کہ

△ ش ب ا : △ ش ا ج = ش ب : ش ج

۴۔ دو دائرے ا اور ب پر تقاطع کرتے ہیں، ا پر دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں اور یہ محیطوں سے ج اور د پر ملتے ہیں، اگر ا ب، ج ب، ب د کو ملایا جائے تو ثابت کرو کہ

△ ج ب ا : △ ا ب د = ج ب : ب د

۵۔ مثلث ا ب ج کا مثلث پائیں د ع ف ہے [حصہ سوم صفحہ ۱۲۵، ترجمہ تکملن]

ثابت کرو کہ △ ا ب ج : △ د ب ف = ا ب^2 : ب د^2

اسلئے ثابت کرو کہ شکل ا ف د ج : △ د ب ف = ا د^2 : ب د^2

۶۔ مثلث ا ب ج کے اندر اس کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے ایک اور مثلث بنایا گیا ہے، اس نئے مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے تیسرا مثلث بنایا گیا ہے اور اسی طرح۔ بتاؤ کہ چوتھا مثلث بلحاظ رقبہ کے اصلی مثلث کا کونسا حصہ ہے؟

۷۔ ا سنٹی میٹر کے ضلع پر منتظم مسدس شکل بنائی گئی ہے، اس کے

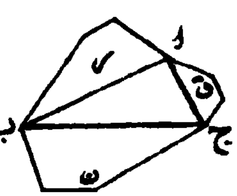
اضلاع کے وسطی نقاط کو ترتیب وار ملانے سے دوسری مسدس شکل بنائی گئی ہے وغیرہ وغیرہ، بتاؤ کہ اصلی شکل کو پانچویں شکل سے بلحاظ رقبہ کیا نسبت ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ دو متشابہ ہم محیط شکلوں کے رقبے اُن کے حائط دائروں کے قطروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

[اقلیدس م ۱۲ شکل ۱]

مسئلہ اثباتی ۴۷ [اقلیدس م ۶ ش ۳۱]

مثلث قائم الزاویہ میں کوئی شکل مستقیم الاضلاع وتر پر بنائی گئی ہے، اسکے متشابہ باقی دو اضلاع پر بھی متشابہ شکلیں متشابہ طور پر بنائی گئی ہیں، ثابت کرو کہ وتر پر کی شکل باقی دو شکلوں کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ ا ب ج مثلث قائم الزاویہ ہے، ب ج اس کا وتر ہے، اور متشابہ شکلیں ن، ق، ر اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر بالترتیب متشابہ طور پر بنائی گئی ہیں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ

شکل ر + شکل ق = شکل ن

ثبوت۔ چونکہ متشابہ اشکال ر اور ن کے متناظر اضلاع ا ب اور ب ج ہیں،

اس لئے $\frac{\text{شکل م}}{\text{شکل ن}} = \frac{\text{اب}^2}{\text{ب ج}^2}$ ....(۱) مسئلہ ۴۳

اسی طرح $\frac{\text{شکل ق}}{\text{شکل ن}} = \frac{\text{ا ج}^2}{\text{ب ج}^2}$ ....(۲)

(۱) اور (۲) کے ہر طرف کی مساوی نسبتوں کو جمع کرنے سے

$\frac{\text{شکل م} + \text{شکل ق}}{\text{شکل ن}} = \frac{\text{اب}^2 + \text{ا ج}^2}{\text{ب ج}^2}$

لیکن $\text{اب}^2 + \text{ا ج}^2 = \text{ب ج}^2$ مسئلہ ۲۹

اسلئے شکل م + شکل ق = شکل ن

نتیجہ۔ مثلث قائم الزاویہ کے وتر کو قطر مان کر جو دائرہ کھینچا جائے وہ باقی اضلاع پر کے دائروں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا جو اسی طرح ان ضلعوں کو قطر مان کر کھینچے جائیں۔

یہ اس لئے کہ دائروں کے رقبے ان کے قطروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔ [حصۂ سوم صفحہ ۱۲۸، ترجمہ مکمل]

مشقیں (متفرق)

۱۔ مثلث اب ج کا زاویہ ا قائمہ ہے، ا د وتر پر عمود ہے، ثابت کرو کہ

(۱) $\text{ب ا}^2 = \text{ب ج} \times \text{ب د}$ (۲) $\text{ج ا}^2 = \text{ج ب} \times \text{ج د}$

اس سے مسئلہ ۲۹ حاصل کرو کہ

$\text{ب ج}^2 = \text{ب ا}^2 + \text{ا ج}^2$

۲۔ مسئلہ ۴۴ کی شکل میں ا سے ب ج پر ا د عمود ... اس طرح ثابت کرو کہ اگر شکل ن = △ ا ب ج

تو (۱) شکل ق = △ ا د ج (۲) شکل م = △ ا د ب

۳۔ مسئلہ ۴۷ کی شکل میں اگر اب : اج = ۸ : ۵ اور اگر شکل ن = ۹۰۸ مربع سنٹی میٹر تو اشکال ق اور س کے رقبے معلوم کرو۔

۴۔ ب ما اور ج ے مثلث اب ج کے وسطانیے ہیں اور یہ نقطہ و پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، مثلث ب وج کی نسبت مثلث ما و ے کے ساتھ معلوم کرو۔

۵۔ ۵ اب ج کے اضلاع اب اور اج مساوی ہیں اور ان میں سے ہر ایک کا طول ۶ء۳" ہے۔ اب میں نقطہ د ایسا لیا گیا ہے کہ اد = ۸ء۱"، د میں سے خط دع کھینچا گیا ہے جو اج ممدودہ سے ع پر ملتا ہے اور مثلث ادع کا رقبہ اصلی مثلث اب ج کے رقبہ کے مساوی ہوتا ہے۔ اع کا طول معلوم کرو۔

۶۔ دائرہ کا قطر اب ہے، ا میں سے دو وتر ان، اق کھینچے گئے ہیں جو ب پر کے مماس سے لا اور ما پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ
(۱) ۵ ان ق اور ا ما لا متشابہ ہیں۔
(۲) چار نقطے ن، ق، ما، لا ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔

۷۔ مثلث اب ج کے زاویہ ا کا خارجی منصف قاعدہ ب ج سے د پر اور اب ج کے حائط دائرہ سے ع پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

اب × اج = اع × اد

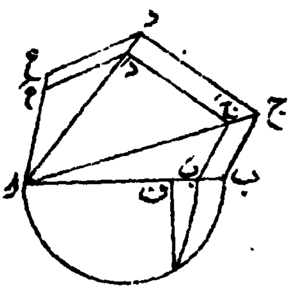
۸۔ خط مستقیم کو انتہائی اور اوسط نسبت سے تقسیم کرنے سے کیا مراد ہے؟
اگر ۱۰ سنٹی میٹر لمبے خط مستقیم کو اس طرح تقسیم کیا جائے تو اس کے حصوں کا طول معلوم کرو اور ترسیمی طریق پر اپنے نتیجہ کی جانچ کرو۔

۹۔ بلحاظ رقبہ کے مثلث اب ج کے مساوی ایک مثلث بناؤ جس کے دو ضلع برابر ہوں اور جس کا راسی زاویہ ا کے برابر ہو۔
دیے ہوئے قاعدہ پر مثلث بناؤ جس کے دو ضلع مساوی ہوں

اور جو رقبہ میں معلومہ مثلث ا ب ج کے مساوی ہو۔

مسئلہ عملی ۴۰

ایک شکل بناؤ جو ایک دی ہوئی مستقیم الاضلاع شکل کے متشابہ ہو اور اسکے رقبہ کی کسی معلومہ کسر کے مساوی ہو۔



ا ب ج د ع دی ہوئی شکل ہے، اس کے متشابہ ایک شکل بنانا ہے جسکا رقبہ شکل ا ب ج د ع کی کسی دی ہوئی کسر (مثلاً $\frac{3}{4}$) کے مساوی ہو۔

عمل ۔ ا ف کو ا ب کی تین چوتھائی کے مساوی کاٹو مسئلۂ عملی ۷، ا ب سے حصہ ا بَ ایسا کاٹو کہ ا بَ خطوط ا ف، ا ب کے درمیان وسط تناسب ہو [مسئلہ عملی ۳۸، نوٹ]

ا بَ پر شکل ا بَ جَ دَ عَ بناؤ جو ا ب ج د ع کے متشابہ ہو مسئلہ عملی ۳۹

تب شکل ا بَ جَ دَ عَ = $\frac{3}{4}$ شکل ا ب ج د ع

ثبوت عمل کی رو سے ا بَ^{2} = ا ف × ا ب

اب اشکال ا ب ج د ع، ا بَ جَ دَ عَ متشابہ ہیں اور ا ب، ا بَ متناظر اضلاع ہیں ۔

مسئلہ ۱۷ اسلئے شکل

$$\frac{\text{ا ب' ج' د' ع'}}{\text{ا ب ج د ع}} = \frac{\text{ا ب'}^2}{\text{ا ب}^2}$$

$$= \frac{\text{اف} \times \text{اب}}{\text{اب}^2} = \frac{\text{اف}}{\text{اب}} = \frac{۳}{۴}$$

مشقیں

۱- مثلث ا ب ج کو قاعدہ ب ج کے متوازی خط لا ما کھینچنے سے دو مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔ نقطہ لا، ا ب پر واقع ہوتا ہے اور ما، ا ج پر۔
(۱) حساب سے (۲) پیمائش سے نسبت الا : ا ب معلوم کرو۔

۲- قاعدہ ب ج کے متوازی خط ن ق، لا ما کھینچنے سے مثلث ا ب ج کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرو، اگر ن اور لا خط ا ب پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ان}}{۱} = \frac{\text{الا}}{\sqrt{۲}} = \frac{\text{اب}}{\sqrt{۳}}$$

اس سے قاعدہ کے متوازی خطوط کے ذریعہ کسی مثلث کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرنے کا عمل حاصل کرو۔

۳- مستطیل بناؤ جس کا طول ۸ سنتی میٹر اور عرض ۵ سنتی میٹر ہو، ایک متشابہ مستطیل بناؤ جس کا رقبہ اصل مستطیل کا ایک تہائی ہو۔ قریب ترین ملی میٹر تک اس کا طول ناپو اور حساب سے اپنے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

۴- ذیل کے معطیات کی بنا پر شکل ا ب ج د بناؤ
$\angle$ا = ۹۰°، ا ب = ب ج = ۸ سنتی میٹر، ا د = د ج = ۶ سنتی میٹر
اس کے متشابہ ایک ذوارب‌عۃ الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ ۳۶ مربع سنتی میٹر ہو۔ مستقیب قریب ترین ملی میٹر تک اسکے اس ضلع کا طول معلوم کرو جو ا ب کا

جواب ہے۔

۵۔ سَ کے نصف قطر کے دائرہ کو دو ہم مرکز دائروں کے ذریعہ تین مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔

۶۔ شکل مستقیم الاضلاع بناؤ جو رقبہ میں ایک دی ہوئی شکل ع کے مساوی ہو اور ایک معلومہ شکل ش کے متشابہ ہو

[اقلیدس م ۶ ش ۲۵]

سب سے پہلے اشکال ع اور ش کے مساوی مربعے حاصل کرو [عملی مسائل ۱۹ اور ۳۲] فرض کرو کہ ان مربعوں کے ضلعے بالترتیب دَ، ب ہیں۔ نیز ش کا ایک ضلع شَ ہے۔ ب، دَ، شَ کا چوتھا متناسب فَ معلوم کرو یعنی ب : دَ = شَ : فَ

فَ پر شکل ف بناؤ جو ش کے متشابہ ہو اور فَ، شَ متناظر ضلعے ہوں۔ تب ف مطلوبہ شکل ہوگی۔

$$\frac{ف}{ش} = \frac{فَ^2}{شَ^2} = \frac{دَ^2}{ب^2} = \frac{ع}{ش}$$

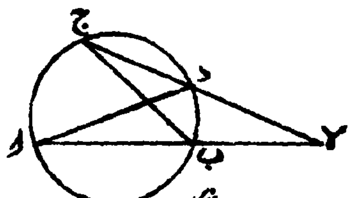
اسلئے شکل ف = شکل ع]

سطحیں (حصوں کے حاصلضرب) دائروں سے متعلق

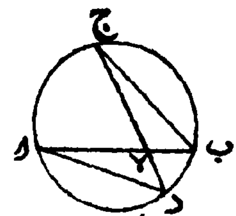
[نوٹ۔ مسائل ۵۷، ۵۸ دونوں کو ایک ہی دعوے میں لاکر ہم اس جگہ ان کا ایک سادہ ثبوت درج کرتے ہیں، ملاحظہ ہو مسئلہ اثباتی ۵۹ کے اختتام پر نوٹ۔ ترجمہ کملن]

مسئلہ اثباتی ۵۷، [اقلیدس م ۳ ش ۳۵، ۳۶]

دائرہ کے کوئی دو وتر ایکدوسرے کو داخلاً یا خارجاً قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ایک وتر کے حصوں کی سطح دوسرے وتر کے حصوں کی سطح کے مساوی ہے



شکل ۲



شکل ۱

دائرہ ا ب ج میں فرض کرو کہ وتر ا ب اور ج د ایکدوسرے کو نقطہ ہ پر داخلاً قطع کرتے ہیں (شکل ۱) اور خارجاً قطع کرتے ہیں (شکل ۲)
دونوں صورتوں میں ثابت کرنا ہے کہ

سطح ہ ا، ہ ب = سطح ہ ج، ہ د

ا د، ب ج کو ملاؤ۔

ثبوت مثلثوں ا ہ د، ج ہ ب میں

∠ ا ہ د = ∠ ج ہ ب، کیونکہ متقابل زاوے ہیں شکل (۱) میں
اور ایک ہی زاویہ ہے شکل (۲) میں

اور ∠ ا = ∠ ج کیونکہ یہ محیط پر کے زاوئے ہیں ایک ہی قوس ب د پر

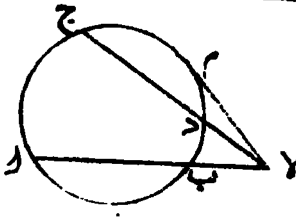
اس لئے باقی زاوئے مساوی ہیں۔

اسلئے مثلث ا ہ د، ج ہ ب متساوی الزوایا ہیں مسئلہ ۱۶

اسلئے $\frac{\text{ہ ا}}{\text{ہ ج}} = \frac{\text{ہ د}}{\text{ہ ب}}$ پس ہ ا × ہ ب = ہ ج × ہ د

یعنی سطح ہ ا، ہ ب = سطح ہ ج، ہ د

نتیجہ صریح — اگر کسی بیرونی نقطہ سے دائرہ کا قاطع اور مماس دونوں کھینچے جائیں تو قاطع اور قاطع کے اُس حصہ کی سطح جو دائرہ کے باہر ہے مماس کے مربع کے مساوی ہوتی ہے۔



فرض کرو کہ نقطہ ل سے دائرہ ا ب ج کا ل ب ا قاطع کھینچا گیا ہے اور ل م مماس۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ $ل ا \times ل ب = ل م^2$

فرض کرو کہ ل د ج کوئی دوسرا قاطع ہے۔

تب $ل ا \times ل ب = ل ج \times ل د$　　مسئلہ ۵، شکل ۲

اور یہ ل د ج کے سب مقامات کے لئے درست ہے۔

اب فرض کرو کہ ل د ج نقطہ ل کے گرد مرکز سے پرے گھومنا شروع کرتا ہے اور نقاط ج اور د دائرہ کے محیط پر ایکدوسرے کے قریب آ جاتے ہیں اور بالآخر وہ م پر منطبق ہو جاتے ہیں اس حالت میں ل د ج مماس ل م بن جاتا ہے۔

اور $ل ج \times ل د$ بن جاتا ہے $ل م \times ل م$ یعنی $ل م^2$

پس اس انتہائی صورت میں $ل ا \times ل ب = ل م^2$

مربع دار کاغذ کے لئے مشقیں

۱۔ نقطہ (۷، ۱۰) کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو و ما سے و پر مس کرتا ہے اور و ل کو ا پر کاٹتا ہے اگر ا سے کوئی خط کھینچا جائے جو و ما کو ق پر اور دائرہ کو ن پر کاٹے تو ثابت کرو کہ $ا ن \times ا ق$ مستقل ہے اور اس کی قیمت معلوم کرو جبکہ ا اکائی مانا جائے۔

۲۔ ج (۵، ۲) کو مرکز مان کر نصف قطر ۱۰ کا دائرہ کھینچا گیا ہے، نقطہ

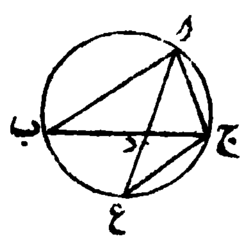
ن (۲۹، ۱۲) سے مماس کھینچے گئے ہیں جن کا وتر تماس ت تَ ہے، اگر ن ج، ت تَ سے ق پر ملے تو (۱) ج ق × ج ن (۲) ن ق × ج ن (۳) ت تَ کے طول کی قیمت معلوم کرو۔

۳۔ دو دائرے کھینچے گئے ہیں، ان کے مرکز (۳، ۱)، (۲، ۰) ہیں اور نیم قطر بالترتیب ۲٫۶ اور ۲٫۵ ہیں۔ ان کے مشترک نقاط کے محدد معلوم کرو اور ان کے وتر مشترک کا طول دریافت کرو۔

نقطہ (۳، ۱)، (۲، ۴) سے جو ہر دائرہ کے مماس کھینچ سکتے ہیں ان کے طول معلوم کرو۔ اپنے نتائج کی پیمائش سے تصدیق کرو۔

مسئلہ اثباتی ۷۶

مثلث کے راسی زاویہ کو ایک خط مستقیم سے تنصیف کیا گیا ہے جو قاعدہ کو کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ اضلاع کی سطح قاعدہ کے حصوں کی سطح اور منصف کے مربع کے مجموعہ کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ ا ب ج مثلث ہے اور زاویہ ب ا ج کی تنصیف خط ا د سے کی گئی ہے

یہ ثابت کرنا ہے کہ ا ب، ا ج کی سطح = ب د، د ج کی سطح + ا د پر کا مربع

مثلث ا ب ج کے گرد دائرہ کھینچو اور ا د کو بڑھاؤ کہ یہ محیط سے ع پر ملے۔ ج ع کو ملاؤ۔

مثلثوں ب ا د اور ع ا ج میں ∠ د ب ا د = ∠ ع ا ج

اور ∠ ا ب د = ∠ ا ع ج ایک ہی قطعہ میں ہیں

باقی ∠ ب د ا = ∠ ع ج ا

پس مثلث ب ا د، ع ا ج متساوی الزوایا ہیں

اسلئے $\frac{\text{اب}}{\text{اع}} = \frac{\text{اد}}{\text{اج}}$ مسئلہ ۶۲

اسلئے اب × اج = اع × اد = (اد + دع) اد = اد² + اد × دع

لیکن اد × دع = ب د × د ج مسئلہ ۵۷

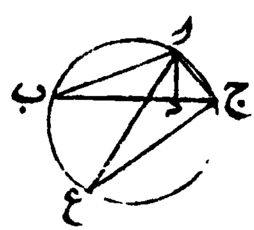
اسلئے سطح اب، اج = سطح ب د، د ج + اد پر کا مربع

مشق - اگر راسی زاویہ ب ا ج کی خارجاً اد سے تنصیف کی جائے تو ثابت کرو کہ

اب × اج = ب د × د ج - اد²

مسئلہ ۷۷

مثلث کے راسی زاویہ سے قاعدہ پر عمود نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ اضلاع کا حاصل ضرب اس عمود اور مثلث کے حائط دائرہ کے قطر کی سطح کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ مثلث اب ج میں ا سے قاعدہ ب ج پر عمود اد نکالا گیا ہے اور اع حائط دائرہ کا قطر ہے -

یہ ثابت کرنا ہے کہ ب ا × اج = اد × اع - ع ج کو ملاؤ

ثبوت - مثلثوں ب ا د اور ع ا ج میں

زاویہ قائمہ ب د ا = زاویہ قائمہ ع ج ا (جو نیم دائرہ ع ج ا میں ہے)

∠ اب د = ∠ اع ج ایک ہی قطعہ میں

باقی ∠ ب اد = ∠ ع اج

یعنی مثلث ب اد، ع اج متساوی الزوایا ہیں۔

اس لئے $\frac{\text{اب}}{\text{اع}} = \frac{\text{اد}}{\text{اج}}$ مسئلہ ٦٢

اس لئے اب × اج = اع × اد

یا سطح اب، اج = سطح اع، اد

نوٹ۔ اگر مثلث اب ج کے اضلاع اَ، بَ، جَ ہوں، ر اسکے حائط دائرہ کا نیم قطر ہو اور عَ عمود اد ہو تو

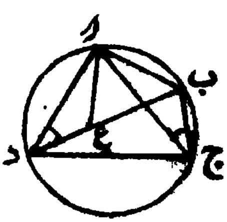
اع × اد = اب × اج

۲ر × عَ = بَ جَ

یعنی ر = $\frac{\text{بَ جَ}}{\text{۲عَ}} = \frac{\text{اَ بَ جَ}}{\text{۲ اَ عَ}} = \frac{\text{اَ بَ جَ}}{\text{۴}\Delta}$

مسئلہ ۸۷ [بطلیموس کا مسئلہ]

ایک ذواربعۃ الاضلاع (چارضلعی) دائرہ کے اندر بن سکتی ہے اس کے قطروں کی سطح اس کے مقابل کے اضلاع کی سطحوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے



[illegible] د ذواربعۃ الاضلاع ہے جسکو دائرہ کے اندر بنایا گیا ہے،

فرض کرو کہ اج اور ب د اس کے قطر ہیں۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ اج، ب د کی سطح = اب، ج د کی سطح
+ ب ج، د ا کی سطح

زاویہ د اع کو زاویہ ب اج کے مساوی بناؤ، ہر ایک میں
∠ ع اج زیادہ کرو۔

تب ∠ د اج = ∠ ب اع

ثبوت۔ مثلثوں ع اب، د اج میں
∠ ع اب = ∠ د اج
اور ∠ اب ع = ∠ اج د ایک ہی قطعہ میں
اسلئے مثلث ع اب اور د اج متساوی الزوایا ہیں مسئلہ ۱۶

اسلئے (ب ا) / (ج ا) = (ب ع) / (ج د) مسئلہ ۶۲

اس لئے ب ا × ج د = ج ا × ب ع ....(۱)

نیز مثلثوں د اع اور ج اب میں
∠ د اع = ∠ ج اب
اور ∠ ا د ع = ∠ اج ب ایک ہی قطعہ میں۔
اسلئے مثلث د اع ج اب متساوی الزوایا ہیں

اسلئے (د ا) / (ج ا) = (د ع) / (ج ب) یعنی ب ج × د ا = ج ا × د ع ...(۲)

(۱) اور (۲) کے ہر جانب کی سطحوں کو جمع کرنے سے
اب × ج د + ب ج × د ا = اج × ب ع + اج × د ع
= اج (ب ع + د ع) = اج × ب د

مشقیں

۱۔ اب ج ایک مثلث متساوی الساقین ہے، اس کا

قاعدہ پر یا قاعدہ مخروجہ پر کوئی نقطہ لا لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلثوں
اب لا ، اج لا کے حائط دائرے مساوی ہیں۔

۲۔ متساوی الساقین مثلث ا ب ج کے قاعدہ کے سروں ب اور ج سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ا ب اور ا ج پر بالترتیب عمود دار ہیں، یہ خط ایک دوسرے کو د پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ

ب ج × ا د = ۲ ا ب × د ب

۳۔ ایک ذوار بعۃ الاضلاع (چار ضلعی) دائرہ کے اندر بن سکتی ہے، اس کے قطر ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، ثابت کرو کہ مقابل کے اضلاع کے حاصل ضربوں کا مجموعہ شکل کے رقبہ کے دوچند کے مساوی ہے۔

۴۔ ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د دائرہ کے اندر بن سکتی ہے اور اس کا قطر ب د ، ا ج کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ا د × ا ب = د ج × ج ب

۵۔ مثلث ا ب ج کے راس ا کو قاعدہ ب ج کے کسی نقطہ کے ساتھ ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس طرح سے جو دو مثلث بنتے ہیں اُن کے حائط دائروں کے نیم قطروں کی نسبت ا ب : ا ج ہے۔

۶۔ مثلث بناؤ جس کا قاعدہ، راسی زاویہ اور اضلاع کی سطح تینوں معلوم ہیں۔

۷۔ ایک ہی دائرہ کے اندر مساوی رقبوں والے دو مثلث بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پہلے مثلث کے کسی دو ضلعوں کی سطح کو دوسرے مثلث کے کسی دو ضلعوں کی سطح کے ساتھ وہی نسبت ہے جو دوسرے کے قاعدہ کو پہلے کے قاعدہ کے ساتھ ہے۔

۸۔ مساوی ضلعوں والا مثلث ا ب ج ہے، اس کے [illegible] ب ج پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے، ن کو [illegible] ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ [illegible]

ن ب + ن ج = ن ا

۹۔ ذواربعۃ الاضلاع ا ب ج د دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے ب د زاویہ ا ب ج کی تنصیف کرتا ہے، اگر نقاط ا اور ج محیط پر ثابت رہیں اور ب کے مقام کو بدلا جائے تو ثابت کرو کہ

ا ب + ب ج : ب د مستقل نسبت ہے

۱۰۔ ضابطہ $ر = \frac{ا ب ج}{۴ \triangle}$ سے (ملاحظہ ہو نوٹ صفحہ ۸۰)

ر کی قیمت معلوم کرو جبکہ مثلث کے اضلاع حسب ذیل ہوں

(۱) ۱۲"، ۲۰"، ۱۳" (۲) ۳۰ فٹ ۲۵ فٹ ۱۱ فٹ

مثلثوں کو مناسب پیمانہ پر بناؤ اور پیمائش سے اپنے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

متفرق نظری مشقیں

حصص ۱ تا ۵ پر

۱۔ دو دائرے جن کے مرکز بالترتیب ج اور د ہیں ایکدوسرے کو ا اور ب پر قطع کرتے ہیں، نقطہ ا میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو دائروں کے محیطوں کو ن اور ق پر کاٹتا ہے ثابت کرو

(۱) ∠ ن ب ق = ∠ ج ا د

(۲) ∠ ب ن ج = ∠ ب ق د

۲۔ ا ب ایک دائرہ کا معلومہ قطر ہے اور ج د کوئی وتر ہے جو ا ب کے متوازی ہے۔ ا ب پر کے کسی نقطہ لا کو ج د کے سروں کے ساتھ ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ

$لا ج^۲ + لا د^۲ = لا ا^۲ + لا ب^۲$

۳۔ ایک ہم محیط ذوار بعۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے متقابل کے ضلعوں کو اتنا خارج کیا گیا ہے کہ وہ ایکدوسرے کو قطع کریں۔ ثابت کرو کہ ایسا کرنے سے جو دو زاوئے بنتے ہیں ان کے منصف ایکدوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

۴۔ ایک مثلث کا راسی زاویہ، اس زاویہ کا ایک حائط ضلع اور اس عمود کا طول جو راس سے قاعدہ پر نکالا جائے تینوں معلوم ہیں۔ مثلث بناؤ۔

۵۔ ایک خط مستقیم پر ایک ہی ترتیب میں تین نقطہ ا، ب، ج ہیں، خط پر ایک ایسا نقطہ ن معلوم کرو کہ ن ب فاصلوں ن ا اور ن ج کے درمیان وسط تناسب ہو۔

۶۔ مثلث ا ب ج کے قاعدہ میں کوئی نقطہ د ہے، د میں سے خطوط د ع، د ف اضلاع ا ب، ا ج کے بالترتیب متوازی کھینچے گئے ہیں اور ضلعوں کو یہ ع اور ف پر کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ع ف وسط تناسب ہے مثلثات ف ب د، ع د ج کے درمیان۔

۷۔ ایک دائرہ میں ن ق ایک ثابت وتر ہے اور ن، ق میں سے دو متوازی وتر ن ل، ق ما کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ل ما ایک ثابت ہم مرکز دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۸۔ دو دائرے ایک دوسرے کو ج پر مس کرتے ہیں۔ ج میں سے دو علی القوائم خط کھینچے گئے ہیں جو دائروں سے بالترتیب ن، نَ پھر ق، قَ پر ملتے ہیں۔ اگر مرکزوں کے ملانے والا خط محیطوں کو نقاط ا، اَ پر کاٹے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ن نَ}^2 + \text{ق قَ}^2 = \text{ا اَ}^2$$

۹۔ مثلث ا ب ج کے راسی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے

اور قاعدہ سے ع پر ملتا ہے، اگر مثلثوں ا ب ع، ا ج ع کے بیرونی دائروں کے قطر ق۱، ق۲ ہوں تو ق۱ : ق۲ = ب ع : ع ج

۱۰۔ ا ب، ا ج ایک دائرہ کے وتر ہیں، ا پر کے مماس کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو ا ب اور ا ج کو بالترتیب د اور ع پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ا ب × ا د = ا ج × ا ع

۱۱۔ ایک خط دو معلومہ نقطوں پر تقسیم کیا گیا ہے، اس پر ایک تیسرا نقطہ دریافت کرو جس کے فاصلے خط کے سروں سے متناسب ہوں ان فاصلوں کے جو تیسرے نقطہ اور معلومہ نقطوں کے درمیان ہیں۔

۱۲۔ مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کے پائے معلوم ہیں۔ مثلث کو بناؤ۔

۱۳۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے اندر اور باہر دائرے کھینچ سکتے ہیں، ثابت کرو کہ اندرونی دائرہ کے متقابل نقاط تماس کے ملانے والے خط ایکدوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں۔

۱۴۔ دو خط ایکدوسرے پر عمود وار ہیں، ان کے درمیان دو مساوی دائرے اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ ہر دائرہ اثنائے حرکت میں ایک ہی خط کو مس کرتا ہے اور دونوں دائرے باہم مس کرتے ہیں۔ نقطہ تماس کا طریق معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک دئے ہوئے دائرہ کا قطر ا ب ہے، ا ب کے ایک ہی جانب دو وتر ا ج، ب د ہیں جو ایکدوسرے کو ع پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جو دائرہ د، ع، ج میں سے گذرتا ہے وہ معلومہ دائرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے۔ [ملاحظہ ہو تعریف صفحہ ۱۲۱]

۱۶۔ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے ہر تین اضلاع کو مس کرنیوالے

چار دائرے کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے مرکز ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوں گے۔

۱۷- خط مستقیم ا ب کو ج اور د پر اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ

ا ب : ا ج = ا ج : ا د

ا میں سے کسی سمت میں ایک خط ا ع کھینچا گیا ہے اور ا ع = ا ج، ثابت کرو کہ ب ج اور ج د کے سامنے ع پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

۱۸- مثلث کا راسی زاویہ، اس کے حائط ضلعوں کی باہمی نسبت اور اس کے حائط یا بیرونی دائرہ کا قطر تینوں معلوم ہیں، مثلث کو بناؤ۔

۱۹- و ایک ثابت نقطہ ہے، ایک خط و ن ایک ثابت خط سے ن پر ملتا ہے، اگر و ن پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ نسبت و ق : و ن مستقل ہو تو ق کا طریق معلوم کرو۔

۲۰- و ایک ثابت نقطہ ہے ایک خط و ن کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت دائرہ سے ن پر ملتا ہے۔ اگر و ن پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ نسبت و ق : و ن مستقل ہو تو ق کا طریق معلوم کرو۔

۲۱- دو مساوی دائرے باہم ا اور ب پر قطع کرتے ہیں، ان میں سے ایک کے محیط پر کوئی نقطہ ج ہے جس سے ا ب پر عمود کھینچا گیا ہے جو دوسرے دائرہ سے و اور ف پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ و اور ف میں سے کوئی ایک نقطہ مثلث ا ب ج کا عمودی مرکز ہے۔ ان دو صورتوں میں تمیز کرو۔

۲۲- تین مساوی دائرے ایک نقطہ ا میں سے گذرتے ہیں اور ان کے باقی نقاط تقاطع ب، ج، د ہیں، ثابت کرو کہ ان چار نقطوں میں سے کسی تین کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کا مرکز عمودی چوتھا نقطہ ہے۔

۲۳- دائرہ کے باہر ایک نقطہ ہے، اس نقطہ سے دائرہ کے

مقعر محیط تک خط مستقیم کھینچو جسکی تنصیف محدب محیط پر ہو۔ کب یہ سوال ناممکن ہوگا۔

۲۴۔ مثلث کا قاعدہ، ارتفاع اور اس کے حائط دائرہ کا نیم قطر تینوں معلوم ہیں، مثلث کو بناؤ۔

۲۵۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور باقی اضلاع کا مجموعہ دونوں معلوم ہیں، قاعدہ کے ایک سرے سے راس پر کے خارجی زاویہ کے منصف پر جو عمود کھینچ سکتا ہے اس کے پایہ کا طریق دریافت کرو۔

۲۶۔ مثلث کو بناؤ، اس کے خارجی دائروں کے تینوں مرکز معلوم ہیں یا ایک اس کے اندرونی دائرہ کا مرکز (درمرکز) اور دو خارجی مرکز معلوم ہیں

۲۷۔ مثلث ا ب ج کا عمودی مرکز و ہے، ثابت کرو کہ

ا و² + ب ج² = ب و² + ج ا² = ج و² + ا ب² = ق²

جہاں ق بیرونی دائرہ کا قطر ہے۔

۲۸۔ ایک دائرہ کی قوس کا وسطی نقطہ ج ہے اور قوس کا وتر ا ب ہے، مزدوج قوس پر کوئی نقطہ د ہے، ثابت کرو کہ

ا د + د ب : د ج = ا ب : ا ج

۲۹۔ مثلث ا ب ج کے ضلع ا ج میں نقطہ د ہے اور ا ب میں نقطہ ع ہے۔ ب د اور ج ع ایک دوسرے کو ایسے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جن کی باہمی نسبت ۴ : ۱ ہے۔ ثابت کرو کہ د اور ع بالترتیب ج ا، ب ا کو نسبت ۳ : ۱ سے تقسیم کرتے ہیں۔

۳۰۔ اگر دو ثابت نقطوں سے ایک ایسے خط مستقیم پر کے عمودوں کی نسبت جو ان کے درمیان سے گذرتا ہے مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط مستقیم ایک

ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۳۱- مثلث ا ب ج کے راس ا سے ایک خط کھینچو جو ب ج مخروجہ سے ایسے نقطہ د پر ملے کہ ا د قاعدہ کے حصوں کے درمیان وسط تناسب ہو۔

۳۲- دو دائرے اندر کی طرف سے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، بڑے دائرہ کا ایک وتر ا ب چھوٹے دائرہ کو ج پر مس کرتا ہے اور و ا، و ب چھوٹے دائرہ کو بالترتیب ن اور ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

و ن : و ق = ا ج : ج ب

۳۳- ا ب دائرہ کا وتر ہے، محیط پر کوئی نقطہ ج ہے، ا ج اور ب ج اس قطر کو جو ا ب پر عمود وار ہے بالترتیب د اور ع پر کاٹتے ہیں اگر دائرہ کا مرکز و ہو تو ثابت کرو کہ سطح و د، و ع نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے۔

۳۴- دائرہ کے قطر ا ب پر ایک نقطہ ما ہے، دائرہ کا مماس ما د کھینچا گیا ہے اور د سے قطر پر عمود د لا نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ لا، ما قطر ا ب کو داخلاً اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۳۵- دائرہ کے محیط پر ایک نقطہ ایسا معلوم کرو کہ اس سے دو اور نقاط معلومہ تک جو خط کھینچے جائیں ان کے طولوں میں ایک دی ہوئی نسبت ہو۔

۳۶- مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ کے منصف کا مقام دونوں معلوم ہیں۔ مثلث کو بناؤ۔

۳۷- دو دائرے ایک دوسرے کو خارجاً نقطہ ع پر مس کرتے ہیں

پہلے دائرہ کا وتر ا ب خارج کیا گیا ہے اور یہ دوسرے دائرہ کو ج پر مَس کرتا ہے، اسی طرح دوسرے دائرہ کا وتر اَ بَ مخروجہ پہلے دائرہ کو ج پر مَس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ا ب × اَ بَ = ۴ ب ج × بَ ج

۳۸۔ خارجی نقطہ معلومہ سے ایک خط مستقیم کھینچو جو ایک دائرہ سے چوتھا حصہ کاٹے۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ مثلث کے بیرونی دائرہ کے مرکز کو راسوں سے جو خط ملاتے ہیں وہ عمودی مثلث کے متناظر اضلاع پر عمود وار ہوتے ہیں۔

۴۰۔ مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے اور ن سے اضلاع ب ج، ج ا پر عمود ن د اور ن ع کھینچے گئے ہیں، مثلث ن د ع کے بیرونی مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۴۱۔ مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ ن کے سمسن خط اور ب ج کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہے جو ا ن اور ا میں سے گذرنے والے بیرونی دائرہ کے قطر کے درمیان بنتا ہے۔

۴۲۔ مثلث کا قاعدہ، راسی زاویہ، قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق تینوں معلوم ہیں۔ مثلث بناؤ۔

۴۳۔ خطوط مستقیم کے دو جوڑے ہیں، ان کے باہم قطع کرنے سے جو چار مثلث بنتے ہیں اُن کے بیرونی یا حائط دائرے ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

۴۴۔ خطوط مستقیم کے دو جوڑوں کے تقاطع سے جو چار مثلث بنتے ہیں ان کے عمودی مرکز ہم خط ہوتے ہیں۔

۴۵۔ ایک ہی دائرہ کے اندر ایک ہی تعداد اضلاع کے جو کثیر الاضلاع بن سکتے ہیں اُن میں سے زیادہ رقبہ اور محیط والا

منتظم کثیر الاضلاع ہے۔

۴۶۔ ایک خط مستقیم ن ا ب پر دو نقطے ا اور ب لئے گئے ہیں اور خط ن ا ب کو اس کے ثابت سرے ن کے گرد گھمایا گیا ہے جس مستوی میں ن ا ب گھومتا ہے اس میں ایک ثابت نقطہ ج ہے، ج ا، ج ب کو ملا کر متوازی الاضلاع ج ا د ب کی تکمیل کی گئی ہے، ثابت کرو کہ د کا طریق دائرہ ہے۔

۴۷۔ مثلث متساوی الاضلاع بناؤ جو ایک دئے ہوئے مثلث متساوی الساقین کے مساوی ہو۔

۴۸۔ مثلث کا راسی زاویہ بلحاظ مقام اور مقدار دونوں کے معلوم ہے، نیز اس کے احاطہ کرنے والے ضلعوں کا مجموعہ بھی معلوم ہے۔ بیرونی دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۴۹۔ کوئی مثلث ا ب ج ہے، اس کے ضلعوں پر باہر کی طرف متساوی الاضلاع مثلث بنائے گئے ہیں۔ اگر ان مثلثوں کے اندرونی دائروں کے مرکز (درمرکز) ٧، ما، ے ہوں تو ثابت کرو کہ ٧ ما ے متساوی الاضلاع ہے۔

۵۰۔ دائرہ میں ایک مثلث بناؤ جس کے دو ضلعے دو معلومہ نقطوں میں سے گذریں اور تیسرا ضلع ایک معلومہ خط کے متوازی ہو۔

۵۱۔ دائرہ میں ایک مثلث بناؤ جس کے تینوں ضلعے تین نقاط معلومہ میں سے گذریں۔

۵۲۔ ایک خط مستقیم پر چار نقطے ا، ب، ٧، ما ہیں، اس میں و ایک ایسا نقطہ ہے کہ سطح و ا، و ما مساوی ہے سطح و ب، و ٧ کے۔ اگر و کو مرکز مان کر ایسے نیم قطر پر دائرہ کھینچا جائے جو و ا اور و ما کے درمیان وسط تناسب ہو تو ثابت کرو کہ اس دائرہ کے ہر نقطہ پر ا ب اور ٧ ما کے سامنے مساوی زاوئے بنیں گے۔

۵۳- ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوں سے اس کے فاصلے ایک معلومہ نسبت رکھتے ہیں، نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

۵۴- مثلث کے حائط، داخلی، خارجی دائروں کے مرکز بالترتیب ط، ے، ے₁ ہیں اور متناظر دائروں کے نیم قطر م، ر، ر₁ ہیں۔ اگر نو نقطہ دائرہ کا مرکز ن ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{ط ے}^2 = \text{م}^2 - ۲\,\text{م ر}$　(۲) $\text{ط ے}_1^2 = \text{م}^2 + ۲\,\text{م ر}_1$

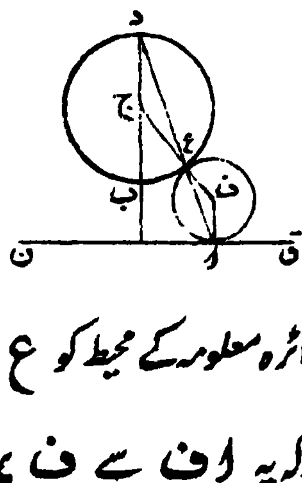
(۳) $\text{ن ے} = \frac{1}{2}\,\text{م} - \text{ر}$　(۴) $\text{ن ے}_1 = \frac{1}{2}\,\text{م} + \text{ر}_1$

متفرق مسئلے اور مشقیں

۱۔ دائرے کھینچنے کے چند عمل

مثال ۱۔ ایسا دائرہ کھینچو جو ایک دئے ہوئے دائرہ (ج) کو مس کرے نیز ایک دئے ہوئے خط مستقیم ن ق کو ایک نقطہ معلومہ ا پر مس کرے۔

عمل۔ ا پر عمود ا ف قائم کرو مطلوبہ دائرہ کا مرکز ا ف پر کہیں واقع ہوگا۔



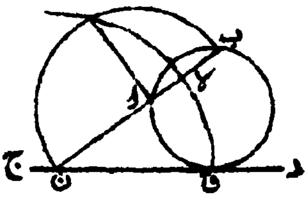
دئے ہوئے دائرہ کے مرکز ج میں سے وہ قطر ب د کھینچو جو ن ق پر عمود وار ہو۔

ا کو اس قطر کے ایک سرے د کے ساتھ ملاؤ اور فرض کرو کہ خط ا د دائرہ معلومہ کے محیط کو ع پر کاٹتا ہے۔

ج ع کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ یہ ا ف سے ف پر ملے۔
تب مطلوبہ دائرہ کا ف مرکز ہے اور ف ا نیم قطر۔

[ثبوت بہم پہنچاؤ۔ ثابت کرو کہ ا ب کو ملانے اور اسے محیط تک خارج کرنے سے مسئلہ کا دوسرا حل حاصل ہو سکتا ہے۔]

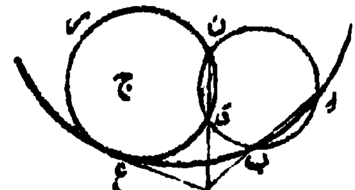
مثال ۲۔ دائرہ کھینچو جو دو نقاط معلومہ ا اور ب میں سے گزرے اور خط مستقیم ج د کو مس کرے۔



عمل۔ ب ا کو ملاؤ اور خارج کرو
کہ یہ ج د سے ن پر ملے۔
ن ا، ن ب کے درمیان ن لا
وسط تناسب معلوم کرو
[مسئلہ عملی ۴۸، نوٹ]
ن د (یا ن ج) سے ن ق مساوی ن لا کے کاٹو۔
تب ا، ب اور ق میں سے گذرنے والا دائرہ ج د کو ق پر مس کرے گا۔ [مسئلہ عملی ۲۵]

[ثبوت بہم پہنچاؤ اور دکھاؤ کہ مسئلہ کے بالعموم دو حل ہوں گے۔ عمل کی مناسب ترمیم کرو جبکہ ا ب، ج د کے متوازی ہو۔]

مثال ۳۔ دائرہ کھینچو جو دو نقاط معلومہ ا، ب میں سے گذرے اور ایک دائرہ معلومہ (ج) کو مس کرے۔

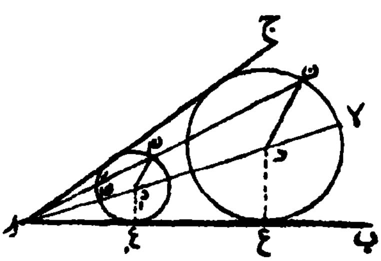


عمل۔ ا، ب میں سے کوئی دائرہ کھینچو جو دئے ہوئے دائرہ کو ن اور ق پر کاٹے۔
ا ب کو اور ن ق کو ملاؤ اور انہیں اتنا خارج کرو کہ یہ د پر ملیں۔
د سے معلومہ دائرہ کا مماس د ع کھینچو۔
تب دائرہ جو ا، ب، ع میں سے گذرے گا وہ معلومہ دائرہ کو ع پر مس کرے گا۔

[مسائل ۵۸، ۵۹ سے ثبوت بہم پہنچاؤ اور دکھاؤ کہ اس مسئلہ کے بالعموم دو حل ہیں، عمل کی مناسب ترمیم کرو جبکہ خط اَ ب کا عمودی منصف اَ ج میں سے گذرے]

مثال ۴۔ دائرہ کھینچو جو ایک نقطہ معلومہ ن میں سے گذرے اور دو سیدھے خطوط ا ب، ا ج کو مس کرے۔

عمل۔ زاویہ ب ا ج کا منصف ا لا کھینچو۔ سب دائرے جو ا ب اور ا ج کو مس کرتے ہیں اُن کے مرکز ا لا پر واقع ہوتے ہیں۔



ا لا پر کوئی نقطہ دَ لو، اس سے ا ب پر عمود دَ ع کھینچو۔ دَ کو مرکز مان کر دائرہ کھینچو جو ا ب اور اَ ج کو مس کرے۔
ا ن کو ملاؤ، فرض کرو کہ یہ دائرہ (دَ) کو ن، نَ پر کاٹتا ہے۔ دَ نَ کو ملاؤ اور ن میں سے ن د، نَ دَ کے متوازی کھینچو جو ا لا کو د پر کاٹے۔

تب دائرہ مطلوبہ کا د مرکز ہے اور د ن نیم قطر۔

[د ع، ا ب پر عمود نکالو، متشابہ مثلثات ا د ع، ا دَ عَ اور ا د ن، ا دَ نَ کے ذریعہ ثابت کرو کہ د ع = د ن]
دَ نَ کو ملانے اور پہلے کی طرح عمل کرنے سے دوسرا حل حاصل ہوگا۔
عمل کی مناسب ترمیم کرو جبکہ خط باہم متوازی ہوں۔

مربع دار کاغذ کے متعلق مشقیں

۱۔ ایک دائرہ کا مرکز مبدأ پر ہے اور اِس کا نیم قطر ۱۰ ہے، وہ دائرہ کھینچو جو اِس دائرہ کو مس کرے، نیز محور ی کو نقطہ (۰، ۲۰) پر مس کرے۔ دکھاؤ کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں، اُس دائرہ کا نیم قطر معلوم کرو جو ربع اول میں واقع ہے، نیز جہاں یہ دائرہ معلومہ کو مس کرتا ہے اُس نقطہ کے محدد دریافت کرو۔

۲۔ ایک دائرہ معلوم ہے جس کا مرکز مبدأ پر ہے اور نیم قطر ۱۰ ہے ایسا دائرہ کھینچو جو اس دائرہ کو نقطہ (۸، ۶) پر مس کرے نیز محور ما کو مس کرے۔
دکھاؤ کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں، اِن کے نیم قطر اور محور ما کے ساتھ اِن کے نقاط تماس معلوم کرو۔

۳۔ ۲" نیم قطر کے دائرہ کا ایک ربع کاٹو۔ اِس کے اندر ایک دائرہ بناؤ۔ ثابت کرو کہ اندرونی دائرہ کا نیم قطر $ر^{۲} + ۴ر - ۴ = ۰$ کی مثبت اصل کے مساوی ہے۔
حساب اور پیمائش سے نیم قطر نکالو

۴۔ ثابت کرو کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں جو محددوں کے محوروں کو مس کریں اور نقطہ (۲"، ۲") میں سے گذریں، نیز ثابت کرو کہ اِن کے نیم قطر مساوات درجہ دوم $ر^{۲} + ۴ر\sqrt{۲} - ۸ = ۰$ کی دو اصلیں ہیں۔
چھوٹا دائرہ کھینچو اور پیمائش سے اس کا نیم قطر معلوم کرو۔

۵۔ نقاط (۰، ۲") اور (۳"، ۰) کو ملاؤ، نیز نقاط (۰، ۳") اور (۲"، ۰) کو ملاؤ۔ دائرہ کھینچو جو ملانے والے دو خطوط کو مس کرے اور مبدأ میں سے گذرے۔

۶۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع کا ضلع ۳" ہے، اسکے اندر تین

ایسے مساوی دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک دائرہ مثلث کے دو ضلعوں اور باقی دو دائروں کو مس کرے۔
اگر کسی ایک دائرہ کا نصف قطر ر ہو تو ثابت کرو کہ

$$ر(مس ۶۰° + ۱) = \frac{۳}{۲}$$

اس سے ر کی قیمت انچ کے قریب ترین سوویں حصہ تک معلوم کرو۔

۷۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۲ء۰″ ہے، اس کے اندر تین مساوی دائرے کھینچو جن میں سے ہر ایک باقی دو دائروں کو اور دائرہ معلومہ کو مس کرے۔
اگر مساوی دائروں میں سے کسی ایک کا نصف قطر ر ہو تو ثابت کرو کہ

$$ر(۱ + قم ۶۰°) = ۲$$

اس لئے ر کو انچ کے قریب ترین سوویں حصہ تک معلوم کرو۔

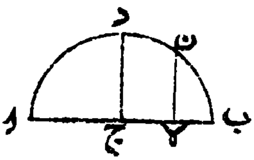
۲۔ اعظم اور اقل قیمتیں

فرض کرو کہ کوئی خط، زاویہ یا شکل کسی دئے ہوئے شرائط کے ماتحت بدل رہا ہے یعنی یہ اپنے مقام اور مقدار کو بتدریج بدلتا ہے، یہ دیکھنا مطلوب ہے کہ آیا اس کی حالت کی مسلسل تبدیلیوں میں کوئی ایسے مقام ہیں جہاں یہ بڑھتے بڑھتے گھٹنا شروع ہوتا ہے یا گھٹتے گھٹتے بڑھنا شروع ہوتا ہے۔ اس مقام یا حالت میں جہاں یہ بڑھتے بڑھتے گھٹنا شروع ہوا اس کی مقدار کی جو قیمت ہوگی اس کو ہم قیمت اعظم کہنگے اور جہاں یہ گھٹتے گھٹتے بڑھنا شروع ہوا اسکی مقدار کی قیمت کو ہم قیمت اقل کہنگے۔ ہم یہاں صرف اُن مسائل پر غور کرینگے جن میں تبدیلی صرف ایک مرتبہ ہوگی بڑھنے سے گھٹنے کی حالت میں یا برعکس اس کے۔ پس موجودہ اغراض کیلئے قیمت اعظم حقیقت میں بدلنے والی مقدار کی بڑی سے بڑی قیمت ہوگی اور قیمت اقل چھوٹی سے چھوٹی۔

ایسے سوالوں کے حل کرنے کے لئے دو اشارے دئے جاتے ہیں ۔

(۱) ہم دیکھتے ہیں کہ بدلنے والی ہندسی مقداروں کی صورت میں اعظم اور اقل قیمتیں صرف موڑ کے نقطہ پر واقع ہوں گی یعنی دونوں طرف سے مقدار یا تو اس نقطہ کی طرف چڑھیگی یا اس نقطہ سے اترے گی۔ پس طبعی طور پر یہ خیال پیدا ہوتا ہے کہ مقدار کی اعظم یا اقل قیمت اس مقام پر پیدا ہوگی جہاں یہ متشاکل صورت یا حالت اختیار کرتی ہے۔ ہم دیکھینگے کہ بالعموم ایسا ہی ہوتا ہے

مثال ۱۔ خط ا ب کو داخلاً اس طرح تقسیم کرو کہ اس کے دو حصوں کی سطح زیادہ سے زیادہ ہو۔



ا ب کی تنصیف ج پر کرو اور
ا ب پر نصف دائرہ بناؤ۔
ا ب پر کوئی نقطہ ل لو اور ل
سے ل ن عمود نکالو جو محیط سے
ن پر ملے، تب

ا ل × ل ب = ن ل² مسئلہ عملی ۳۴

ن ل بڑے سے بڑا ہے جبکہ یہ ج د پر منطبق ہو

اس لئے سطح ا ل × ل ب اعظم ہوگی جبکہ ل ا ب کا نقطہ تنصیف ہو۔

ملاحظہ ہو کہ صورت اعظم اس مقام پر وقوع پذیر ہوتی ہے جہاں ن ل متشاکل مقام ج د میں ا ب کی عمودی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) نیز اگر ہندسی مقدار کی کسی مقررہ قیمت کے لئے اس کو کھینچنے یا بنانے کا عمل دریافت ہو سکے تو یہ معلوم ہو سکیگا کہ کہاں اس کی قیمت اعظم یا اقل ہوتی ہے کیونکہ اس کے بعد ہم اس امر کا معائنہ کرینگے کہ ہندسی عمل یا بناوٹ کے برقرار رہنے کے لئے مقررہ قیمت کے لئے کیا حدود ہیں، اعلیٰ حد سے قیمت اعظم اور ادنیٰ سے قیمت اقل حاصل ہوگی۔ یہ پہلے بتایا جا چکا ہے کہ اگر معطیات میں خاص شرائط ہونے کی وجہ سے کسی سوال کے دو حل ہوں، اور مختلف

شرائط کے ماتحت کوئی حل ممکن نہ ہو تو کوئی درمیانی شرط ایسی ضرور ہوگی جسکی رو سے دونوں حل ملکر ایک ہو جاتے ہوں۔ [ملاحظہ ہو مسئلہ عملی ۱۵ کے بعد طریقوں کا تقاطع، مشاہدہ]

ایسے حالات میں اس ایک حل سے مقدار زیر بحث کی قیمت اعظم یا اقل حاصل ہوگی۔

مثال ۲۔ ج د لامتناہی خط مستقیم ہے، معلوم کرو کہ اس کے کس نقطہ پر ایک محدود خط ا ب کے سامنے پڑے سے بڑا زاویہ بنے گا۔

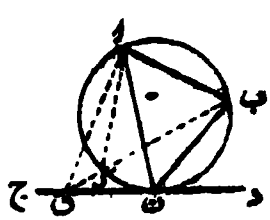
پہلے معلوم کرو کہ ج د کے کس نقطہ پر ا ب کے سامنے ایک معلومہ زاویہ بنے گا۔ یہ اس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔

ا ب پر قطعہ دائرہ بناؤ جس میں کا زاویہ معلومہ زاویہ کے مساوی ہو [مسئلہ عملی ۲۴]

اگر قطعہ کی قوس خط ج د کو دو نقطوں پر کاٹے تو ج د پر دو نقطے ہوں گے جن پر ا ب کے سامنے معلومہ زاویہ بنے گا لیکن اگر قوس ج د کو نہ کاٹے تو کوئی نقطہ نہیں ہوگا۔

اوپر کے اصولوں کی بنا پر ہمیں امید کرنی چاہیے کہ بڑے سے بڑا زاویہ اس وقت حاصل ہوگا جبکہ قوس ج د کو مس کرے۔ ہم دیکھینگے کہ یہ قیاس درست ہے۔

دائرہ کھینچو جو ا، ب میں سے گذرے اور ج د کو مس کرے، فرض کرو کہ نقطہ تماس ن ہے، مثال ۲ صفحہ ۹۳



تب ∠ ا ن ب ایسے ہر زاویہ سے بڑا ہوگا جو ا ب کے سامنے اس کے اُس جانب جس جانب کہ ن ہے ج د کے کسی نقطہ پر بنتا ہے۔

ثبوت۔ ج د پر کوئی اور نقطہ ق لو جو ا ب کے اسی جانب ہو جس جانب کہ ن ہے۔ ا ق، ق ب کو ملاؤ۔

فرض کرو کہ ب ق دائرہ سے ک پر ملتا ہے۔ ا ک کو ملاؤ۔

تب ∠ ا ک ب = ∠ ا ن ب ایک ہی قطعہ میں۔

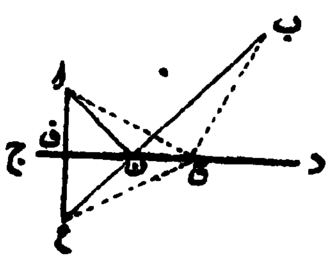
لیکن خارجہ زاویہ ا ک ب بڑا ہے مقابل کے اندرونی زاویہ ا ق ب سے

اس لئے ∠ ا ن ب بڑا ہے ∠ ا ق ب سے

اس لئے ∠ ا ن ب سب ایسے زاویوں سے بڑا ہے۔

نوٹ ۔ایسے دو دائرے کھنچ سکتے ہیں جو ا، ب میں سے گذریں اور ج د کو مس کریں۔ ان دائروں کے دو نقاط تماس ہوں گے، ایک ا ب کے ایک جانب واقع ہوگا دوسرا دوسری جانب، پس ج د کے اُن سب نقاط میں سے جو ا ب کے ایک جانب واقع ہوتے ہیں بڑے سے بڑا زاویہ ا ب کے سامنے اس طرف کے نقطہ تماس پر ہوگا اسی طرح دوسری جانب کے سب نقاط میں سے زاویہ اعظم اُس طرف کے نقطہ تماس پر ہوگا۔

مثال ۳۔ ج د ایک لامحدود خط ہے اور اسکے ایک ہی جانب دو نقطے ا، ب ہیں، ج د میں ایسا نقطہ معلوم کرو کہ ا اور ب سے اسکے فاصلوں کا مجموعہ کم سے کم ہو۔



ا سے ج د پر عمود ا ف نکالو۔ ا ف کو ع تک اتنا خارج کرو کہ ا ف = ف ع، ع ب کو ملاؤ کہ یہ ج د کو ن پر کاٹے، ن ا کو ملاؤ، تب ا ن + ن ب اقل ہوگا۔

ثبوت۔ ج د پر کوئی اور نقطہ ق لو۔ ا ق، ب ق، ع ق کو ملاؤ۔

اب مثلث ا ف ن، ع ف ن متطابق ہیں۔

اس لئے ا ن = ع ن، اسی طرح ا ق = ع ق

△ ع ق ب میں ع ق + ق ب بڑا ہے ع ب سے

یعنی ا ق + ق ب بڑا ہے ا ن + ن ب سے

پس ا ن + ن ب اقل ہے۔

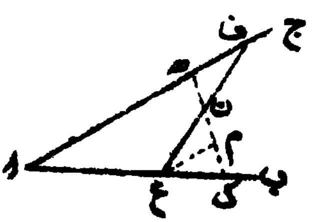
نوٹ۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ∠ ا ن ف = ∠ ع ن ف مسئلہ نظری ۴

= ∠ ب ن ق " ۳

پس ا ن + ن ب کم سے کم ہوتا ہے جبکہ ا ن اور ن ب خط ج د کے ساتھ مساوی زاوئے بنائیں۔

مثال ۴۔ دو متقاطع خط ا ب، ا ج ہیں اور ایک نقطہ ن انکے درمیان واقع ہے۔

ثابت کرو کہ ان سب خطوط میں سے جو ن میں سے گذرتے ہیں اور ا ب، ا ج پر منتہی ہوتے ہیں وہ خط جسکی تنصیف ن پر ہوتی ہے کم سے کم رقبہ والا مثلث قطع کرتا ہے۔



فرض کرو کہ ع ف خط ہے جسکی تنصیف ن پر ہوتی ہے۔

تب △ ف ا ع رقبہ میں کم سے کم ہوگا۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ ن میں سے گذرنے والا

[illegible] کوئی اور خط مستقیم ہے،

[illegible] ع م، ا ج کے متوازی کھینچو۔

ظاہر ہے کہ مثلث ف ھ ن اور ن ع م انطباق پذیر ہیں، مسئلہ نظری ۱۰
اس لئے یہ بلحاظ رقبہ باہم مساوی ہیں۔
اس لئے △ ھ ن ف کم ہے △ ک ن ع سے
ہر ایک میں شکل ا ع ن ھ زیادہ کرو، تب
△ ا ف ع کم ہے △ ھ ا ک سے
یعنی △ ا ف ع اقل ہے۔

اعظم اور اقل قیمتوں پر مشقیں

۱۔ مثلث کے دو ضلعوں کے طول معلوم ہیں، بتاؤ کہ بلحاظ ایک دوسرے کے وہ کس طرح رکھے جائیں کہ مثلث کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔
بڑے سے بڑے مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس میں اَ = ۶،۸ سنتی میٹر، بَ = ۴،۵ سنتی میٹر۔

۲۔ ثابت کرو کہ اُن سب مثلثوں میں سے جن کا قاعدہ اور رقبہ دونوں دئے ہوئے ہیں، مثلث متساوی الساقین کم سے کم محیط والا ہے۔ [ملاحظہ ہو مشق ۲ صفحہ ۹۹]
ایسے مثلث کا کم سے کم محیط معلوم کرو جس کا قاعدہ ۲،۰" ہے اور رقبہ ۱،۲ مربع انچ۔

۳۔ بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث بناؤ جس کا قاعدہ ۱۰ سنتی میٹر ہو اور راسی زاویہ ۶۰° ۔ اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۴۔ مبدأ کو مرکز اور ۱،۵" کو نیم قطر مان کر دائرہ کھینچو۔ نقاط ا (۳"، ۰)، ب (۰، ۳") کو ملاؤ۔ اب میں ایسا نقطہ معلوم کرو جس سے اگر دائرہ کے مماس کھینچے جائیں تو ان کے درمیان بڑے سے بڑا زاویہ بنے۔ زاویہ کو ناپو اور اپنے نتیجہ کی توجیہ کرو۔

۵۔ دو سیدھی پٹڑیاں ایک دوسرے کے اوپر علی القوائم کھڑی کی گئی ہیں اور ایک سیدھی سلاخ ان کے درمیان پھسلتی ہے۔ بتاؤ کہ جو خطہ

پٹڑیوں اور سلاخ کے درمیان بنتا ہے وہ سلاخ کے کس مقام کے لئے رقبہ میں زیادہ سے زیادہ ہوگا۔

۶۔ ایک خط مستقیم کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرو کہ حصوں کے مربعوں کا مجموعہ

(۱) دئے ہوئے مربع کے مساوی ہو۔

(۲) کم سے کم ہو۔

۷۔ دو دائروں کے ایک نقطہ تقاطع میں سے خط کھینچو جو محیطوں پر جاکے ختم ہو

(۱) اور طول میں ایک معلومہ خط کے مساوی ہو۔

(۲) طول میں کم سے کم ہو۔

۸۔ ایک دائرہ کھینچو جو محاور لا اور ما کو نقاط ا اور ب پر مس کرے جبکہ دونوں نقطے مبدأ سے ۲" کے فاصلہ پر واقع ہیں۔ بڑی قوس ا ب پر وہ نقطہ معلوم کرو جس کے محددوں کا مجموعہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

نیز چھوٹی قوس ا ب پر نقطہ معلوم کرو جس کے محددوں کا مجموعہ کم سے کم ہو۔

ہر صورت میں مجموعہ دریافت کرو اور پیمائش سے تصدیق کرو۔

۹۔ دو نقاط معلومہ سے خط کھینچے گئے ہیں جو ایک دئے ہوئے دائرہ کے محدب حصہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے طولوں کا مجموعہ کم سے کم ہوگا جبکہ یہ خط نقطہ تقاطع پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاوئے بنائیں۔

۱۰۔ دکھاؤ کہ ان سب مثلثوں میں سے جن کے راسی زاویہ اور ارتفاع دونوں ایک ہی ہوں مثلث متساوی الساقین کا رقبہ کم سے کم ہوتا ہے۔

جس مثلث میں راسی زاویہ = ۶۰° اور ارتفاع = ۶ سنتی میٹر، اس کا

کم سے کم رقبہ کیا ہوگا؟ اِس کا مجموعہ اضلاع معلوم کرو۔

۱۱۔ دائرہ کے دو متقاطع مماس دئے گئے ہیں، محدب قوس کا مماس کھینچو جو باقی دو مماسوں کے ساتھ مل کر زیادہ سے زیادہ رقبہ والا مثلث بنائے۔

۱۲۔ ایک مثلث کا قاعدہ ۱٫۶" اور رقبہ ۱٫۲ مربع انچ ہونا چاہئے ترسیمی طریق سے (قریب ترین درجہ تک) اس کے راسی زاویہ کی قیمت اعظم معلوم کرو۔

۱۳۔ نقطے ا اور ب دونوں دائرہ کے اندر ہیں یا دونوں باہر، دائرہ کے محیط پر ایک نقطہ معلوم کرو جس پہ اب کے سامنے بڑے سے بڑا زاویہ بنے۔ [دیکھو مثال ۲ صفحہ ۹۳]

۱۴۔ محور لا پر دو نقطے ا، ب مبدأ سے ۰٫۸"، ۱٫۸" کے فاصلوں پر ہیں، محور ما پر نقطہ ن معلوم کرو کہ زاویہ ان ب زیادہ سے زیادہ ہو۔

و ن کا طول محسوب کرو اور زاویہ اعظم ناپو۔

۱۵۔ ایک پل کی تین کمانیں ہیں جن کے عرض بالترتیب ۹۴ فٹ، ۳۲ فٹ اور ۹۴ فٹ ہیں، بتاؤ کہ پل سے کتنے فاصلہ پہ کسی ایک کنارہ پہ وہ نقطہ ہے جہاں پر درمیانی کمان کے سامنے زاویہ اعظم بنتا ہے۔

۱۶۔ ایک دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے باہر ایک نقطہ ن ہے، ن سے ایک خط ن ا ب کھینچو جو محیط کو ایسے نقاط ا اور ب پہ کاٹے کہ مثلث ا ج ب کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

اگر دائرہ کا نصف قطر ۶ سنٹی میٹر ہو تو ایسے بڑے سے بڑے مثلث کا رقبہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ رقبہ، ن کے مقام پہ منحصر نہیں ہے۔

۱۷۔ ایک دائرہ کا نیم قطر ۵٫۵ سنٹی میٹر ہے، اس کے اندر جو بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل بن سکتا ہے اُس کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۸۔ دائرہ کے باہر دو ثابت نقطے ا اور ب ہیں، محیط پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ ان² + ن ب² کم سے کم ہو۔ [دیکھو مسئلہ نظری ۵۶]

۱۹- وتر ا ب پر ایک قطعہ دائرہ بنایا گیا ہے، اسکی قوس پر ایک نقطہ ج ایسا معلوم کرو کہ ا ج اور ب ج کا مجموعہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

۲۰- اُن تمام مثلثوں میں سے جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتے ہیں بڑے سے بڑے محیط والا مثلث متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

۲۱- اُن تمام مثلثوں میں سے جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتے ہیں بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

۲۲- ان تمام مثلثوں میں سے جو ایک مثلث کے اندر بن سکتے ہیں مثلث پائیں سب سے کم محیط والا مثلث ہے۔

۲۳- ایک ہی رقبہ والے سب مستطیلوں میں سے کم سے کم محیط والا مستطیل مربع ہے۔

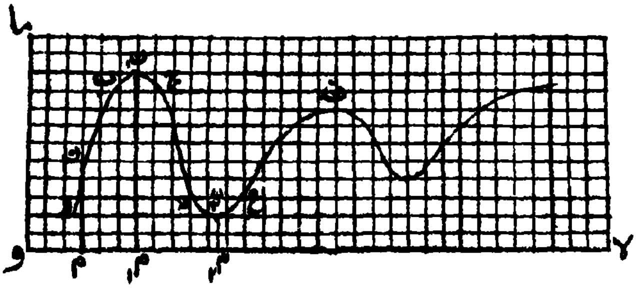
۲۴- بڑے سے بڑے رقبہ والا ایسا مثلث بناؤ جسکے زاوئے ایک معلوم مثلث کے زاویوں کے مساوی ہوں اور جسکے اضلاع تین نقاط معلومہ میں سے گذریں۔

۳- ترسیمیں- اعظم اور اقل قیمتیں دریافت کرنیمیں انکا استعمال

کسی متغیر مقدار کی اعظم یا اقل قیمتوں کے متعلق جو سوال ہوں اکثر اوقات اُن پر ترسیم کے ذریعہ بآسانی بحث ہوسکتی ہے جہاں بدلنے والی مقدار کی مسلسل تبدیلیوں کو شکل میں واضح طور پر دکھایا جاتا ہے۔ ترسیمی عمل کے متعلق مزید معلومات حاصل کرنیکے لئے طالب علم ہال کی کتاب ترسیمی جبر و مقابلہ کی تمہید" (انٹروڈکشن ٹو الجبرا) مطالعہ کرے۔ یہاں صرف ذیل کے عام طریق عمل کا ذکر کر دینا کافی ہوگا جس متغیر مقدار کی مختلف قیمتوں کا معائنہ کرنا مقصود ہے اُسکو ہم ما سے تعبیر کرینگے اور جس مقدار کی رقوم میں ما کو بیان کیا جائیگا اسکو لا سے تعبیر کرینگے۔ محاور لا و ما کے لحاظ سے لا، ما کی متناظر قیمتوں کو مرتسم کرنے سے کئی نقطے حاصل ہوں گے۔ ان نقطوں میں سے مسلسل

منحنی کھینچا جائیگا جس پر کے کسی نقطہ کا معین لا کی معیّنہ قیمت کے جواب میں مقدار زیر بحث کی قیمت کو تعبیر کرے گا۔

اس طریقہ کا خاص فائدہ یہ ہے کہ ترسیم یا تصویر میں بدلنے والی مقدار کے مسلسل تغیرات صاف دکھائی دیتے ہیں اور لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی قیمت فقط ترسیم کے معائنہ سے حاصل ہوسکتی ہے۔ بالخصوص اعظم اور اقل قیمتیں فوراً دیکھنے سے معلوم ہوسکتی ہیں۔



اوپر کی تصویر میں مسلسل منحنی ا ب ج د ع ف ایک متغیر مقدار ق کی ترسیم کو تعبیر کرتا ہے۔ جیسے لا بتدریج بڑھتا ہے معین ما محور وما کے متوازی دائیں جانب حرکت کرتا ہے اور کسی نقطہ پر جو اسکی قیمت ہے وہ لا کی متناظر قیمت کے جواب میں مقدار ق کی قیمت ہے۔ نقطہ ن پر جو ما کی قیمت ہے وہ دونوں جانب پاس کے نقاط ب یا ج پر کی قیمتوں سے بڑی ہے پس ن پر ق کی اعظم قیمت ہے۔ اسی طرح ن پر ما کی قیمت ہر دو جانب پاس کے نقاط د اور ع پر کی قیمتوں سے کم ہے، اسلئے ن پر ق اقل ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اعظم یا اقل قیمتیں صرف موڑ کے نقطوں پر واقع ہوتی ہیں یعنی ایسے نقطوں پر جن کے معین اپنے عین پاس کے معینوں کی نسبت بہ یہ طور پر بالترتیب بڑے یا چھوٹے ہوتے ہیں۔

ذیل کی باتیں قابل توجہ ہیں۔

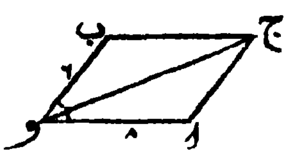
(۱) کسی مسلسل منحنی میں اعظم اور اقل قیمتیں متبادلاً (باری باری)

واقع ہوتی ہیں۔

(۲) معین کی کسی دو مساوی قیمتوں کے درمیان اعظم یا اقل قیمت ضرور واقع ہوتی ہے۔

(۳) کسی نقطہ پر منحنی کا جو ڈھال ہے اُس سے مقدار زیر بحث کے تغیر کی شرح ظاہر ہوتی ہے، نیز ہم دیکھتے ہیں کہ جس نقطہ پر اعظم یا اقل قیمت واقع ہوتی ہے وہاں پر منحنی کا مماس محور لا کے متوازی ہے۔

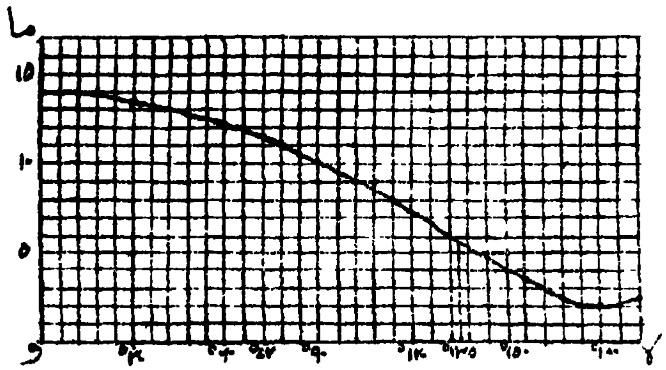
مثال ۱۔ و ا ج ب ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں و ا = ۸ سنتی میتر، و ب = ۶ سنتی میتر۔ و ب، و کے گرد گھومتا ہے جیسے زاویہ ا و ب صفر سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے و ج مسلسل بدلتا ہے، اسکی تبدیلیوں کو مرتسم کرو اور ترسیم سے زاویہ ۷۲° کے جواب میں و ج کی قیمت دیکھو اور زاویہ کی قیمت معلوم کرو جبکہ و ج = ۵٫۶ سنتی میتر۔



زاویہ ا و ب کو بقدر ۳۰° کے بڑھانے اور سلسلہ وار شکلیں کھینچنے سے و ج اور ∠ ا و ب کی متناظر قیمتوں کے کئی جوڑے پیمائش سے حاصل کرو اور ذیل کی جدول بناؤ۔

∠ ا و ب	۰°	۳۰°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۵۰°	۱۸۰°
و ج	۱۴٫۰	۱۳٫۵	۱۲٫۲	۱۰٫۰	۷٫۲	۴٫۱	۲٫۰

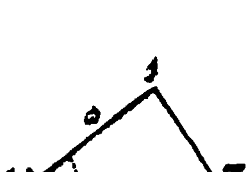
زاویہ کو لا سے تعبیر کرو۔ اسکی متواتر قیمتوں کو محور لا پر ناپو، و ج کی متناظر قیمتوں کو معین مانو۔ اگر و لا کا ہر حصہ ۹° کو تعبیر کرے اور و ما پر کا ہر حصہ ا سنتی میتر کو، تو ذیل کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔



ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب، لا = °۷۲ تو ما = ۱۱٫۵ سنتی میٹر اور جب، ما = ۶٫۵ سنتی میٹر تو لا = °۱۳۵ ۔

طالب علم کو اِس سے بڑے پیمانہ پر الگ ترسیم بنانی چاہیے اور و ج کی قیمتوں کو °۱۸۰ سے ذرا بڑے زاویوں کے لئے جاری رکھنا چاہئے۔ ایسا کرنے سے اُسے معلوم ہوگا کہ و ج اقل ہوتا ہے جبکہ زاویہ ا و ب = °۱۸۰ ۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ °۳۶۰ پر و ج کی قیمت پھر ۱۴ ہوتی ہے جو اعظم قیمت ہے۔

مثال ۲۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جس میں ب ج، ج ا بالترتیب ۶ اور ۵ سنتی میٹر ہیں۔ اگر ب ج کو ثابت رکھا جائے اور ب ا کو ب کے گرد گھمایا جائے تو جیسے زاویہ ۰ سے °۱۸۰ تک بڑھتا ہے مثلث کے رقبہ کے تغیرات پر غور کرو۔ ترسیم کے ذریعہ ان تغیرات کی توضیح کرو اور معلوم کرو کہ زاویہ ب کی کس قیمت کے لئے رقبہ ۱۰ مربع سنتی میٹر ہوگا۔



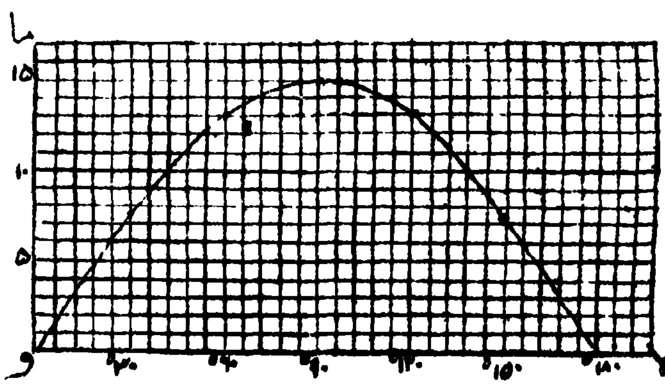
نیز معلوم کرو کہ ب کی کس قیمت کے لئے رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا۔

زاویہ ب کو بقدر °۳۰ کے بڑھاؤ اور مثلثوں کا ایک سلسلہ حاصل کرو۔ ہر صورت میں رقبہ معلوم کرو اور زاویہ اور رقبہ کی متناظر قیمتوں کو

جدول ذیل میں حسب ذیل لکھو۔ [ملاحظہ ہو مثال ۵، صفحہ ۲۲۵ ترجمہ مکملن جلد اول]

زاویہ	۰°	۳۰°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۵۰°	۱۸۰°
رقبہ مربع سنتی میٹروں میں	۰	۷٫۵	۱۳٫۰	۱۵٫۰	۱۳٫۰	۷٫۵	۰

زاویہ کی قیمتوں کو محور لا پر ناپو اور رقبہ کی متناظر قیمتوں کو معین مانو۔ گذشتہ مثال کی اکائیوں کے مطابق حسب ذیل ترسیم حاصل کرو۔



شکل کے دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ معین کی بڑی سے بڑی قیمت ۱۵ ہے، اور یہ ۹۰° کے زاویہ کے جواب میں ہے۔ پس مثلث کا رقبہ زیادہ سے زیادہ اُسوقت ہوتا ہے جبکہ معلومہ ضلعوں کا درمیانی زاویہ ۹۰° ہو۔

منحنی سب سے بڑے معین کے گرد متشاکل ہے، پس سوائے ۹۰° کے زاویہ کی بالعموم دو قیمتیں ہیں جن کے جواب میں رقبہ کی ایک ہی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ جب، رقبہ ۱۰ مربع سنتی میٹر ہو تو زاویہ کی دو قیمتیں ۴۲° اور ۱۳۸° ہوتی ہیں۔

نوٹ۔ مثلث ا ب ج کا رقبہ = $\frac{1}{2}$×۵×۶ جب ب = ۱۵ جب ب،

پس جیبوں کی جدول کی مدد سے ترسیم بنائی جاسکتی ہے [ملاحظہ ہو ترسیمی جبر و مقابلہ صفحہ ۲۹]

ترسیموں کے متعلق مشقیں

۱۔ خط ل ما پر ایک عمود ن ق کھینچا گیا ہے جس کا طول ۸ سنتی میتر ہے۔ ن ر ایک مائل خط ہے جو ن ق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے۔ عہ کو متواتر یہ قیمتیں ۱۵°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰°، ۷۵° دینے سے پیمائش سے ن ر کی متناظر قیمتیں معلوم کرو اور ان نتائج سے جدول بناؤ۔ ن ر کے تغیرات کو ترسیم کے ذریعہ دکھاؤ اور (۱) اگر عہ = ۶۳° تو ن ر کا طول معلوم کرو اور (۲) اگر ن ر = ۸،۸ سنتی میتر تو عہ کی قیمت معلوم کرو۔

۲۔ ایک مثلث میں اَ = ۴ سنتی میتر، بَ = ۵ سنتی میتر، ج کی مختلف قیمتوں کے لئے مثلث کے رقبہ کے تغیرات کو ترسیم کے ذریعہ دکھاؤ۔ ترسیم سے (۱) رقبہ معلوم کرو جبکہ ج = ۶۳° (۲) ج کی قیمتیں دریافت کرو جبکہ رقبہ ۹،۵ مربع سنتی میتر ہو (۳) بتاؤ کہ اضلاع کو باہم کس طرح رکھا جائے کہ رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

۳۔ دو سیدھی علی القوائم پٹریوں ج د، ج ع کے درمیان ۵ سنتی میتر لمبی ایک سلاخ ا ب پھسلتی ہے، طول ج ا کی مختلف قیمتوں کے لئے مثلث ب ج ا کے رقبہ کے تغیرات کو ترسیم کے ذریعہ دکھاؤ

ا ب کا مقام کیا ہوگا کہ رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

۴۔ ۱۰ سنتی میتر لمبا ایک سیدھا خط ا ب، ن پر داخلاً تقسیم کیا گیا ہے، جیسے ن، ا سے ب تک حرکت کرتا ہے (۱) ا ن × ن ب (۲) ا ن^2 + ن ب^2 کے تغیرات کو ترسیمی طریق پر دکھاؤ۔

ہر صورت میں ن کا مقام معلوم کرو جس سے اعظم یا اقل قیمت حاصل ہو۔

۵۔ ایک مثلث میں بَج = ۶ سنٹی میٹر اور ا = ۶۰°، ب کی مختلف قیمتوں کے لئے اَ کی تبدیلیوں کو ترسیمی طریق پر دکھاؤ۔ ترسیم سے اَ کی کم سے کم قیمت معلوم کرو۔

اس قیمت کے لئے مثلث کو بناؤ اور اپنے نتیجہ کی جانچ کرو۔

۶۔ نیم دائرہ کے قطر اب کے سرے ا میں سے خط ان محیط تک کھینچا گیا ہے، زاویہ ن اب کی مختلف قیمتوں کے لئے مثلث ب ان کے رقبہ کے تغیرات کی ترسیمی طور پر نشان دہی کرو۔ جب رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو تو اس زاویہ کی قیمت معلوم کرو۔

۷۔ مسئلہ نظری ۳۰ کے ذریعہ دکھاؤ کہ مساوات ما = م لا² (م مستقل ہے) کی ترسیم ان مستقیم الاضلاع اشکال کے رقبہ کے تغیرات کو ظاہر کرتی ہے جو باہم متشابہ ہوں اور مسلسل طور پر بدلنے والے اضلاع پر متشابہ طور پر بنائی جائیں۔ مربع کے ضلع کے بدلنے سے اس کے رقبہ کے تغیرات کو دکھانے کے لئے ترسیم کھینچو اور ترسیم سے اس مربع کا ضلع تقریباً معلوم کرو جس کا رقبہ ۱۱٫۸ مربع انچ ہو۔

۸۔ جن منحنیوں کی مساواتیں حسب ذیل ہیں ان کی ترسیمیں کھینچو

(۱) ما = ۲ لا − $\frac{\text{لا}^2}{۴}$ (۲) ما = ۵ − ۴ لا − لا²

۵ − ۴لا − لا² کی اعظم قیمت معلوم کرو۔

۴ - موسیقی تقسیم

تعریفیں

۱- اگر تین مقداریں ایسی ہوں کہ آخری جوڑے کا فرق پہلے جوڑے کے فرق کے مساوی ہو تو یہ مقداریں سلسلہ حسابیہ میں کہلاتی ہیں
مثلاً ا، ب، ج سلسلہ حسابیہ میں ہونگی اگر

$$ج - ب = ب - ا$$

ب کو ا اور ج کے درمیان اوسط حسابیہ کہتے ہیں۔

۲- اگر تین مقداروں میں سے تیسری کو دوسری کے ساتھ وہی نسبت ہو جو دوسری کو پہلی سے ہے تو یہ مقداریں سلسلہ ہندسیہ میں کہلاتی ہیں۔
مثلاً ا، ب، ج سلسلہ ہندسیہ میں ہونگی اگر

$$\frac{ج}{ب} = \frac{ب}{ا}$$

ب کو ا، ج کے درمیان اوسط ہندسیہ کہتے ہیں۔

۳- تین مقداریں ایسی ہیں کہ پہلی کو تیسری کے ساتھ وہی نسبت ہے جو پہلی اور تیسری کے حاصل تفریق کو دوسری اور تیسری کے حاصل تفریق کے ساتھ ہے۔ ایسی مقداریں سلسلہ موسیقیہ میں کہلاتی ہیں۔
مثلاً اگر ا، ب، ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو

$$\frac{ا}{ج} = \frac{ا - ب}{ب - ج}$$

ب کو ا اور ج کے درمیان اوسط موسیقی کہتے ہیں۔

نوٹ۔ چونکہ تعریف کی رو سے

$$\frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ج}} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا ب}}$$

اس لئے $\frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ا}}$

پس ا، ب، ج کے الٹ $\frac{1}{\text{ا}}$، $\frac{1}{\text{ب}}$، $\frac{1}{\text{ج}}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔ یہ نتیجہ اکثر کارآمد ہوتا ہے۔

۴۔ اگر دو معلومہ مقداروں ا، ب کے درمیان اوساط حسابی، ہندسی، موسیقی بالترتیب ح، ھ، م ہوں تو اوپر کی تعریفوں سے لازم آتا ہے کہ $\text{ح} = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{2}$، $\text{ھ} = \sqrt{\text{ا ب}}$، $\text{م} = \frac{2\,\text{ا ب}}{\text{ا} + \text{ب}}$

تعریف۔ اگر ایک محدود خط مستقیم کی اندر سے اور باہر سے اس طرح تقسیم کی گئی ہو کہ اندر کے حصوں کی نسبت باہر کے حصوں کی نسبت کے مساوی ہو تو اسے اصطلاحاً یوں بیان کرتے ہیں کہ خط کی موسیقی تقسیم کی گئی ہے۔



مثلاً اب کی موسیقی تقسیم ہوگی ن اور ق پر اگر

ان : ن ب = اق : ب ق

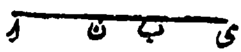
ن اور ق کو ا اور ب کے موسیقی مزدوج کہتے ہیں۔
اوپر کے تناسب کی رقوم کو بدلنے سے

ان : اق = ن ب : ب ق

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ن اور ق، اب کو داخلاً اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کریں تو ا اور ب، ن ق کو خارجاً اور داخلاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔ اسلئے ا اور ب نقاط

ن اور ق کے موسیقی مزدوج ہیں۔
دوسرے الفاظ میں اگر اب کی ن اور ق پر موسیقی تقسیم ہو تو ن ق کی ا اور ب پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ اگر اب کی ن پر داخلاً اور ق پر خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کی جائے تو ان اور اق کے درمیان اب اوسط موسیقی ہوگا۔



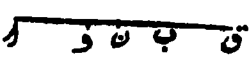
مفروض کی بنا پر اق : ب ق = ان : ن ب

متبادلاً اق : ان = ب ق : ن ب

اق : ان = اق - اب : اب - ان

اسلئے اق، اب، ان سلسلۂ موسیقی میں ہیں۔

مثال ۲۔ اب کی ن اور ق پر موسیقی تقسیم کی گئی ہے، اگر اب کا نقطۂ وسطی و ہو تو ثابت کرو کہ ون × وق = وا^{2}



چونکہ اب کی ن، ق پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے

اس لئے ان : ن ب = اق : ب ق

اسلئے ان - ن ب : ان + ن ب = اق - ب ق : اق + ب ق

∴ ۲ ون : ۲ وا = ۲ وا : ۲ وق

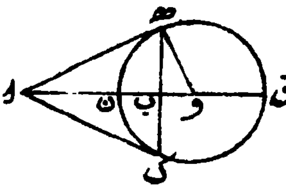
ون × وق = وا^{2}

برعکس اسکے اگر ون × وق = وا^{2} تو ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

ان : ن ب = اق : ب ق

یعنی اب کی ن اور ق پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

مثال ۳۔ دو خطوط مستقیم کے حسابی، ہندسی، موسیقی اوسطوں کو ترسیمی طریق پر ہم یوں دکھا سکتے ہیں۔



ان، اق دئے ہوئے خط ہیں جن کے حسابی، ہندسی، موسیقی اوسط مطلوب ہیں۔

ن ق کے قطر پر دائرہ بناؤ اور مماس اھ، اک کھینچو۔
وتر تماس ھ ک کھینچو جو اق کو ب پر کاٹتا ہے۔ و ھ کو ملاؤ

(۱) او خطوط ان، اق کے درمیان حسابی اوسط ہے، کیونکہ صریحاً

$$\text{او} = \frac{\text{ان} + \text{اق}}{۲}$$

(۲) اھ ہندسی اوسط ہے ان اور اق کے درمیان کیونکہ

$$\text{اھ}^{۲} = \text{ان} \times \text{اق}$$

(۳) اب اوسط موسیقی ہے ان، اق کے درمیان کیونکہ متشابہ مثلثوں اوھ، ھوب سے

$$\text{وا} \times \text{وب} = \text{وھ}^{۲}$$ مسئلہ ۶۶، نتیجہ صریح

$$= \text{ون}^{۲}$$

اس لئے ن ق کی ا، ب پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے، مثال ۲، مندرجہ بالا
اسلئے نیز اب کی ن اور ق پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے
یعنی ان اور اق کے درمیان اب موسیقی اوسط ہے۔
متشابہ قائم الزاویہ مثلثوں و اھ، ھ اب سے

اد × اب = اص² مسئلہ ۶۶ نتیجہ صریح

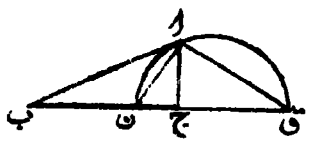
دو خطوط مستقیم کے درمیان جو ہندسی اوسط ہو وہ اُن کے حسابی اور موسیقی اوسطوں کا وسط تناسب ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ مثلث کا قاعدہ اور باقی اضلاع کی نسبت دونوں معلوم ہیں۔ راس کا طریق دریافت کرو۔

ب ج دیا ہوا قاعدہ ہے اور ب ا ج کوئی ایسا مثلث اس پر بنایا گیا ہے کہ

ب ا : ا ج = نسبت معلوم

ا کا طریق مطلوب ہے۔



∠ ب ا ج کی داخلاً اور خارجاً ا ن اور ا ق سے تنصیف کرو، تب ن اور ق خط ب ج کو اندر اور باہر کی طرف سے اس طرح تقسیم کرتے ہیں کہ

ب ن : ن ج = ب ق : ج ق = دی ہوئی نسبت

اس لئے ن اور ق ثابت نقطے ہیں۔

نیز چونکہ ا ن اور ا ق زاویہ ب ا ج کی داخلاً اور خارجاً تنصیف کرتے ہیں اسلئے ∠ ن ا ق قائمہ ہے۔

اسلئے ا کا طریق وہ دائرہ ہے جو ن ق کے قطر پر بنایا جائے۔

موسیقی تقسیم پر مشقیں

۱۔ ل اور ما پہ اب کی موسیقی تقسیم کی گئی ہے ثابت کرو کہ

$$(1)\quad \frac{2}{\text{اب}} = \frac{1}{\text{ال}} + \frac{1}{\text{اما}}$$

(۲) ۱/ا ما + ۱/ب ما = ۲/ل ما

ل اور ما نقاط ا، ب کے موسیقی مزدوج ہیں۔

۲۔ (۱) اگر ا ب = ۴ء۲ انچ اور ا ل = ۵ء۱ انچ تو ا ما معلوم کرو

(۲) اگر ل ما = ۵ء۱ سنٹی میٹر اور ا ما = ۲ سنٹی میٹر تو ب ما معلوم کرو۔

۳۔ کسی زاویہ کے بازو اور اسکے داخلی اور خارجی منصّف ایک خط سے ملتے ہیں، ثابت کرو کہ نقاط تقاطع پر خط کی موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

۴۔ تین نقطے ب، ن، ج ایک خط مستقیم پر ہیں، اس نقطہ کا طریق معلوم کرو جس پر ب ن اور ن ج کے سامنے مساوی زاوئے بنتے ہیں۔

۵۔ مثلث کے قاعدہ کے وسطی نقطہ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو ایک ضلع کو کاٹتا ہے، راس میں سے گذرنے والے قاعدہ کے متوازی خط کو کاٹتا ہے اور باقی ضلع مخروجہ کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس طرح خط کی موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

۶۔ مثلث کے قاعدہ پر کے ایک زاویہ سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو قاعدہ کے وسطانیہ (وسطی) کو مقابل کے ضلع کو اور راس سے قاعدہ کے متوازی جو خط کھینچا جائے اس کو کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ خط کی موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

۷۔ ایک خط پر ن، ق نقاط ا، ب کے موسیقی مزدوج ہیں اور ج خط کے باہر ایک نقطہ ہے، اگر زاویہ ن ج ق قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ ج ن اور ج ق زاویہ ا ج ب کے داخلی اور خارجی منصّف ہیں۔

۸۔ ا ب خط مستقیم ہے، و اس کا نقطہ وسطی ہے اور ل، ما پر اس کی موسیقی تقسیم کی گئی ہے۔ جیسے ل نقطہ و سے ب تک حرکت کرتا ہے ما کے مقام کے تغیرات کی پیروی کرو۔

اگر ا ب = ۲ سنٹی میٹر تو د ﻻ کے بدلنے سے و م ا کے تغیرات دکھانے کے لئے ترسیم کھینچو۔

۹۔ معلومہ طول کے دو خطوط مستقیم کے درمیان موسیقی اوسط معلوم کرنے کے لئے جو ذیل کا عمل درج کیا گیا ہے اس کی صحت ثابت کرو

ا ب، ج د دئے ہوئے خط ہیں، ان کو اس طرح رکھو کہ یہ باہم متوازی ہوں۔ ان کے سروں کو ایک ہی جانب ا ج اور ب د کے ذریعہ ملاؤ، اور مقابل کی جانب میں ا د اور ب ج کے ذریعہ ملاؤ۔ فرض کرو کہ موخرالذکر و پہ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، خط ن و ق کو دئے ہوئے خطوں کے متوازی کھینچو، یہ نقطہ ن پر ا ج کو اور ق پر ب د کو کاٹتا ہے۔ ن ق مطلوبہ اوسط موسیقی ہے۔

تعریفات

۱۔ خط مستقیم پر نقطوں کے سلسلہ کو صف کہتے ہیں اگر صف میں چار نقطے ہوں جن میں سے ایک جوڑے کے نقطے دوسرے جوڑے کے لحاظ سے موسیقی مزدوج ہوں تو ایسی صف کو موسیقی صف کہتے ہیں۔

۲۔ ایک ہی نقطہ میں سے گذرنے والے خطوط مستقیم کے سلسلہ کو پنسل کہتے ہیں۔ مشترک نقطہ تقاطع کو پنسل کا راس کہتے ہیں اور ہر ایک خط شعاع کہلاتا ہے۔

جب کسی نقطہ سے چار خط کھینچے جائیں جو موسیقی صف کے چار نقاط میں سے گذریں تو ایسی پنسل کو موسیقی پنسل کہتے ہیں۔

۳۔ خطوط مستقیم کے نظام کو جب ایک خط مستقیم کاٹے اسکو ہم قاطع خط یا صرف قاطع کہیں گے۔

۴۔ ایسے چار خطوط مستقیم کا نظام جن میں سے کوئی تین ایک ہی نقطہ میں سے نہ گذریں مکمل ذوار بعۃ الاضلاع کہلاتا ہے۔

ان خطوط میں سے دو دو کے تقاطع سے چھہ نقطے ملیں گے، ان کو ذوار بعۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے راس کہتے ہیں، اور تین خطوط مستقیم جن میں سے ہر ایک متقابل کے راسوں کو ملاتا ہے قطر کہلاتے ہیں۔

موسیقی تقسیم کے متعلق مسائل

۱۔ اگر موسیقی پنسل کی ایک شعاع کے متوازی ایک قاطع کھینچا جائے، تو باقی تین شعاعوں کے درمیان اس سے مساوی حصے کٹتے ہیں اور برعکس اس کے۔

۲۔ موسیقی پنسل کی شعاعیں اپنے ہر ایک قاطع کو موسیقی نسبت سے تقسیم کرتی ہیں۔

۳۔ اگر موسیقی پنسل میں ایک شعاع دوسرے جوڑے کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرے تو یہ اپنی مزدوج شعاع پر علی القوائم ہوگی، اور برعکس اسکے اگر شعاعوں کے ایک جوڑے کے درمیان زاویہ قائمہ بنے تو یہ شعاعیں دوسرے جوڑے کے درمیانی زاویہ کی اندرونی اور بیرونی تنصیف کرینگی۔

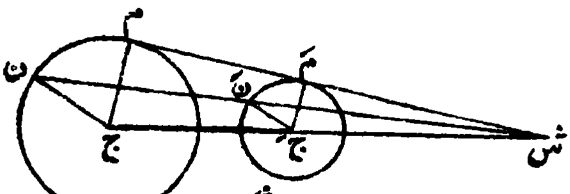
۴۔ دو موسیقی صفیں ا، ن، ب، ط اور اَ، نَ، بَ، طَ دو الگ الگ خطوط پر ہیں، اگر متناظر نقطوں کے تین جوڑوں کے ملانے والے خطوط اَا، نَن، بَب ایک ہی نقطہ س میں سے گذریں تو طَط بھی اسی نقطہ میں سے گذرے گا۔

۵۔ دو متقاطع خطوط پر دو موسیقی صفیں ا، ن، ب، ق اور اَ، نَ، بَ، قَ ہیں (جہاں ن، ب، ق اور نَ، بَ، قَ متناظر نقطے ہیں۔) ثابت کرو کہ ن نَ، ب بَ، ق قَ ہم نقطہ ہیں، نیز ن قَ، ب بَ، ق نَ، ہم نقطہ ہیں۔

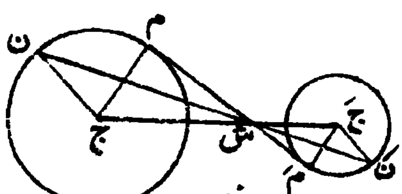
۶۔ اوپر کے نتیجہ کی مدد سے ثابت کرو کہ مکمل ذوار بعۃ الاضلاع میں کوئی سے دو قطر تیسرے کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

۵ ۔ مشابہت کے مرکز

مثال ۔ دو دائروں میں دو متوازی نیم قطر کھینچے گئے ہیں (ہر ایک میں ایک) ان کے سروں کے ملانے والا خط مستقیم مرکزوں کے خط وصل کو دو ثابت نقطوں میں سے کسی نہ کسی ایک پر قطع کرتا ہے۔



شکل ۱



شکل ۲

دو دائرے لو جن کے مرکز بالترتیب ج، جَ ہیں اور نیم قطر ر، رَ۔ ج ن، جَ نَ دو متوازی نیم قطر ہیں، شکل ۱ میں دونوں ایک ہی رخ میں کھینچے گئے ہیں اور شکل ۲ میں مقابل رخوں میں۔ فرض کرو ن نَ، ج جَ کو ش پر کاٹتا ہے۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ ج ن، جَ نَ خواہ کسی رخ میں کھینچے جائیں، نقطہ تقاطع ش دو ثابت نقطوں میں سے ایک نہ ایک ہوگا۔

ثبوت۔ دونوں شکلوں میں مثلث ش ج ن، ش جَ نَ متساوی الزوایا ہیں۔

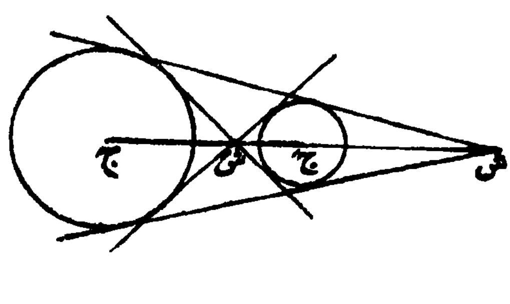
∴ ش ج : ش جَ = ج ن : جَ نَ ۔

$= ر : رَ$

اس لئے ش خط ج جَ کو {شکل ۱ میں خارجاً / شکل ۲ میں داخلاً} ثابت نسبت ر : رَ
سے تقسیم کرتا ہے۔ پس ہر ایک شکل میں ج ن، جَ نَ کی تمام سمتوں کے
لئے ش ثابت نقطہ ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر م مَ دونوں دائروں کا مشترک مماس ہو، سیدھا شکل ا
میں اور آڑا شکل ۲ میں تو دونوں صورتوں میں نیم قطر ج م، جَ مَ
متوازی ہوں گے، اسلئے م مَ مرکزوں کے خط کو ش پر کاٹے گا۔

تعریف۔ ذیل کی شکل میں دو دائرے ہیں، نقطے ش، شَ اُنکے
مرکزوں کے ملانے والے خط کو اِن کے نیم قطروں کی نسبت سے خارجاً اور داخلاً
تقسیم کرتے ہیں، ش، شَ کو ہم **مشابہت کے مرکز** کہینگے،
ش سیدھی مشابہت کا مرکز ہے اور شَ آڑی مشابہت کا۔



نتیجہ۔ چونکہ $\frac{ش\,ج}{ش\,جَ} = \frac{ر}{رَ} = \frac{شَ\,ج}{شَ\,جَ}$

اس لئے دائروں کے مرکز، مشابہت کے مرکزوں کے ساتھ ملکر موسیقی صف
بناتے ہیں۔

اس لئے آڑے اور سیدھے مشترک مماس مرکزوں کے خط وصل کو ایسے

نقطوں پر کاٹتے ہیں جو اس خط ج جَ کو موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ ج اور جَ کا فاصلہ = ۵٫۵ سنتی میٹر، ان کو مرکز مان کر دو دائرے کھینچو جن کے نیم قطر بالترتیب ۲٫۳ سنتی میٹر اور ۱٫۲ سنتی میٹر ہوں (۱) ترسیمی طریق پر (۲) حساب سے ان کے مشابہت کے مرکزوں کا فاصلہ ج سے معلوم کرو۔

۲۔ دو دائروں کے مرکز ج، جَ اور نیم قطر بالترتیب ۸٫۱ اَ اور ۱٫۰ اَ ہیں۔ مشابہت کا سیدھا مرکز ج سے ۷٫۲ کے فاصلہ پر ہے۔ (۱) دائروں کے مرکزوں کے درمیان (۲) ان کے مشابہت کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو۔

۳۔ اوپر کی شکل (۱) میں اگر ش ن دائرہ (ج) کو ق پر اور دائرہ (جَ) کو قَ پر دوبارہ کاٹے تو ثابت کرو کہ

ش ق × ش نَ = ش ن × ش قَ = ش م × ش مَ

۴۔ مثلث اب ج میں ــــ اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور ــــ، ا کے سامنے کے خارجی دائرہ کا مرکز ہے۔ اگر ا ــــ، ب ج کو ما پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ا اور ما ان دو دائروں کے مشابہت کے مرکز ہیں۔

۵۔ ثابت کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز اور ہندسی مرکز بالترتیب مشابہت کے خارجی اور داخلی مرکز ہیں بلحاظ مثلث کے حائط اور نو نقطی دائروں کے۔

۶۔ اگر ایک متغیر دائرہ دو ثابت دائروں کو مس کرے تو نقاط تماس کے ملانے والا خط مشابہت کے ایک مرکز میں سے گزرتا ہے۔ مختلف صورتوں میں تمیز کرو۔

۷۔ دائرہ کھینچو جو دو دئے ہوئے دائروں کو مس کرے اور ایک نقطہ معلومہ میں سے گذرے۔

۸۔ دائرہ کھینچو جو تین معلومہ دائروں کو مس کرے۔

۹۔ ج۱، ج۲، ج۳ تین معلومہ دائروں کے مرکز ہیں۔ جوڑے ج۲، ج۳ کے لحاظ سے مشابہت کے داخلی اور خارجی مرکز بالترتیب ش۱′، ش۱ ہیں، باقی دو جوڑوں کے لحاظ سے ش۲′، ش۲، ش۳′، ش۳ کے وہی معنی ہیں جو پہلی صورت میں بیان ہوئے۔ ثابت کرو کہ

(۱) ش۱′ ج۱، ش۲′ ج۲، ش۳′ ج۳ متراکز ہیں۔

(۲) چھ نقطوں ش۱، ش۲، ش۳، ش۱′، ش۲′، ش۳′ میں سے تین تین ملکر چار خطوط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں

[ملاحظہ ہوں آگے سیوا اور مینی لاس کے مسائل]

علی القوائم دائرے

تعریف۔ دائرے جو اس طرح قطع کریں کہ نقطہ تقاطع پر ان کے مماس ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو ایسے دائروں کو علی القوائم دائرے یا قائم دائرے کہتے ہیں۔

۱۔ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں تو نقطہ تقاطع پر ہر دائرہ کا مماس دوسرے دائرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۲۔ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں تو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع ان کے نیم قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۳۔ اُن دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دائرہ معلومہ کو ایک معلومہ نقطہ پر علی القوائم قطع کریں۔

۴۔ دائرہ کھینچو جو ایک نقطہ معلومہ میں سے گذرے اور ایک دئے ہوئے دائرہ کو ایک نقطہ معلومہ پر علی القوائم قطع کرے۔

۶۔ قطب اور قطبی

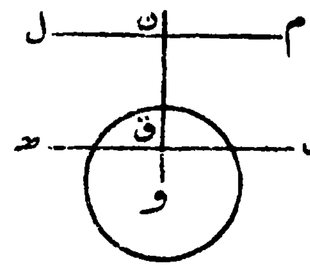
تعریفیں

۱۔ ایک دائرہ کے مرکز میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے اور اس پر دو نقطے ایسے لئے گئے ہیں کہ مرکز سے ان کے جو فاصلے ہیں ان کا حاصل ضرب نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے۔ ایسے دو نقطوں کو ایکدوسرے کا **منقلوب** کہتے ہیں۔

نیچے کی شکل میں و دائرہ کا مرکز ہے، اگر و ن × و ق = (نیم قطر)² تو ن، ق میں سے ہر ایک نقطہ دوسرے نقطہ کا منقلوب ہے۔

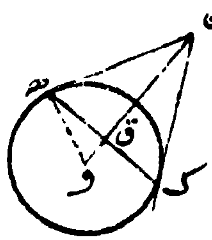
ظاہر ہے کہ اگر ان نقطوں میں سے ایک دائرہ کے اندر واقع ہو تو دوسرا باہر واقع ہوگا۔

۲۔ ایک دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ معلومہ کا قطبی وہ خط مستقیم ہے جو اس نقطہ کے منقلوب میں سے کھینچا جائے اور نقطہ معلومہ اور مرکز کے ملانے والے خط پر عمود وار ہو۔ بلحاظ دائرہ کے نقطہ معلومہ اس خط کا **قطب** کہلاتا ہے۔



مثلاً اوپر کی شکل میں اگر و ن × و ق = (نیم قطر)² اور اگر ن اور ق میں سے ل م، ھ ک بالترتیب و ن پر عمود وار کھینچے جائیں تو ھ ک نقطہ ن کا قطبی ہوگا اور ن بلحاظ دائرہ کے خط ھ ک کا قطب ہوگا۔
نیز ل م قطبی ہے نقطہ ق کا اور ق قطب ہے ل م کا۔
ظاہر ہے کہ بیرونی نقطہ کا قطبی دائرہ کو قطع کرتا ہے اور اندرونی نقطہ کا قطبی دائرہ کے بالکل باہر واقع ہوتا ہے۔ نیز محیط پر کے کسی نقطہ کا قطبی خود اس نقطہ پر کا مماس ہے۔

مثال ۱۔ دائرہ کے لحاظ سے کسی بیرونی نقطہ کا قطبی اُن مماسوں کا وتر تماس ہے جو نقطہ مذکور سے دائرہ تک کھینچے جائیں۔



دائرہ کا مرکز و ہے، ن سے دائرہ کے دو مماس ن ھ، ن ک کھینچو۔ ھ ک کو ملاؤ۔ یہ ثابت کرنا ہے کہ ھ ک، ن کا قطبی ہے۔
ظاہر ہے کہ و ن، وتر تماس ھ ک کو ق پر علی القوائم قطع کرتا ہے، و ھ کو ملاؤ۔
متشابہ مثلثوں ن و ھ، ھ و ق سے

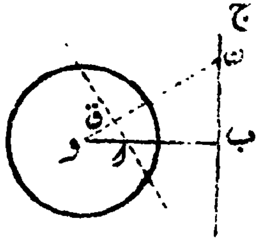
و ن : و ھ = و ھ : و ق

اسلئے و ن × و ق = (نیم قطر)^2 اسلئے ھ ک، ن کا قطبی ہے۔

مثال ۲۔ ا اور ن دو ایسے نقطے ہیں کہ بلحاظ دائرہ کے ا کا قطبی ن میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا قطبی ا میں سے گذرے گا۔

دائرہ کا مرکز و ہے، فرض کرو کہ ا کا قطبی بلحاظ دائرہ کے ب ج ہے اور ب ج، ن میں سے گذرتا ہے۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ ن کا قطبی ا میں سے گذرتا ہے۔



و ن کو ملاؤ اور ا سے و ن پر عمود ا ق کھینچو، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ا ق، ن کا قطبی ہے۔

اب چونکہ ب ج، ا کا قطبی ہے اسلئے ∠ ا ب ن قائمہ ہے۔

[تعریف ۲، صفحہ ۱۲۲]

اور ∠ ا ق ن قائمہ ہے۔ عمل کی رو سے

اسلئے چار نقطے ا، ب، ن، ق ہم محیط ہیں۔

اسلئے و ق × و ن = و ا × و ب [مسئلہ ۵۸]

= (نیم قطر)^2 کیونکہ ب ج، ا کا قطبی ہے

نیز چونکہ ا ق عمود وار ہے و ن پر

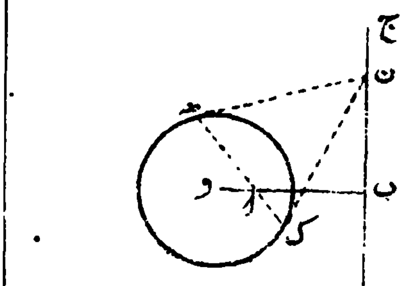
اسلئے ا ق، ن کا قطبی ہے۔

یعنی ن کا قطبی ا میں سے گذرتا ہے، مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ۔ ایسا ہی ثبوت اس صورت میں صادق آئے گا جہاں دیا ہوا نقطہ ا دائرہ کے باہر واقع ہو اور اس کا قطبی ب ج دائرہ کو کاٹے۔

اس مسئلہ کو قطب اور قطبی کی تکافی خاصیت سے موسوم کرتے ہیں۔

مثال ۳۔ دائرہ کے اندر ایک نقطہ ہے، اس میں سے دائرہ کے وتر کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان وتروں کے سروں پر جو مماس کھینچ سکتے ہیں ان کے تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو نقطہ مفروضہ کا قطبی ہے۔



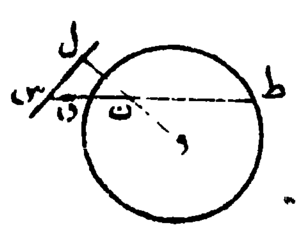
فرض کرو کہ ا دائرہ کے اندر دیا ہوا نقطہ ہے اور ھ ک کوئی وتر ہے جو ا میں سے گذرتا ہے۔
نیز فرض کرو کہ ھ اور ک پر کے مماس ن پر قطع کرتے ہیں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ ن کا طریق ا کا قطبی ہے۔

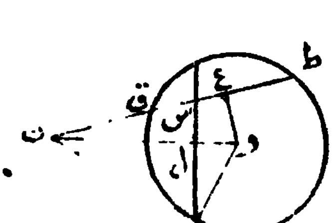
(ھ) ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ ن، ا کے قطبی پر واقع ہے۔
چونکہ ھ ک ان مماسوں کا وترِ تماس ہے جو ن سے کھینچے گئے ہیں اس لئے ھ ک، ن کا قطبی ہے۔ [مثال ۱ صفحہ ۱۲۴]
لیکن ھ ک جو ن کا قطبی ہے ا میں سے گذرتا ہے، اس لئے ا کا قطبی ن میں سے گذرتا ہے۔ [مثال ۲ صفحہ ۱۲۵]
یعنی ن، ا کے قطبی پر واقع ہے۔

(ب) اب ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ ا کے قطبی پر کا کوئی نقطہ دئے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔
فرض کرو کہ ب ج، ا کا قطبی ہے اور اس قطبی پر کوئی نقطہ ن ہے مماس ن ھ، ن ک کھینچو اور فرض کرو کہ ان کا وترِ تماس ھ ک ہے۔
مثال ۱، صفحہ ۱۲۴ سے ہم جانتے ہیں کہ وترِ تماس ھ ک، ن کا قطبی ہے نیز ہم جانتے ہیں کہ ن کے قطبی کو لازماً ا میں سے گذرنا چاہئے کیونکہ ن، ب ج پر واقع ہے جو ا کا قطبی ہے [مثال ۲، صفحہ ۱۲۵]

یعنی ھ ک ا میں سے گذرتا ہے۔
پس معلوم ہوا کہ ن اُن مماسوں کا نقطۂ تقاطع ہے جو ا میں سے گذرنیوالے ایک وتر کے سروں پر کھینچے گئے ہیں۔
(عہ) اور (بہ) سے ہم دیکھتے ہیں کہ طریق مطلوب ا کا قطبی ہے۔
نوٹ۔ اگر ا دائرہ کے باہر ہو تو مسئلہ (عہ) درست رہے گا لیکن اس کا عکس (بہ) ب ج پر کے سب نقطوں کی صورت میں درست نہیں ہو گا۔ کیونکہ اگر ا دائرہ کے باہر ہو تو اس کا قطبی ب ج دائرہ کو کاٹے گا اور قطبی کے اس حصہ پر جو دائرہ کے اندر ہے کوئی نقطہ ایسا نہیں ہو سکتا جو مماسوں کا نقطۂ تقاطع ہو۔
پس ہم دیکھتے ہیں کہ
(۱) بلحاظ دائرہ کے بیرونی نقطہ کا قطبی اُن مماسوں کا وتر تماس ہے جو اس نقطہ سے دائرہ تک کھینچے جائیں۔
(۲) اندرونی نقطہ کا قطبی اُن مماسوں کے تقاطع کا طریق ہے جو اس نقطہ میں سے گذرنے والے وتروں کے سروں پر کھینچے جائیں۔
(۳) محیط پر کے کسی نقطہ کا قطبی خود اس نقطہ پر کا مماس ہوتا ہے۔
مثال ۴۔ ثابت نقطہ ن میں سے دائرہ کا ایک وتر گزرتا ہے ثابت کرو کہ ن اور ن کا قطبی اسکو موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔



شکل (۲)



شکل (۱)

دائرہ کا مرکز و ہے اور ثابت نقطہ ن میں سے گذرنے والا وتر ق ط ہے۔

(۱) جبکہ ن دائرہ کے باہر ہو شکل (۱)

مماس ن م کھینچو اور فرض کرو کہ ن کا قطبی، و ن کو ل پر اور ق ط کو س پر کاٹتا ہے۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ ق ط کی ن اور س پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے

ق ط پر عمود و ع کھینچو اور و م کو ملاؤ۔

تب ن ق × ن ط = ن م² = ن ل × ن و کیونکہ ∠ ن م و قائمہ ہے

= ن ع × ن س کیونکہ س، ع، و، ل ہم محیط ہیں

اِس لئے ۲ ن ق × ن ط = ۲ ن ع × ن س

= (ن ق + ن ط) ن س

[مثال ۹، صفحہ ۱۳۲ ترجمہ کملن، جلد اول]

اِس لئے ن س = ۲ ن ق × ن ط / (ن ق + ن ط)

اسلئے ن ق، ن س، ن ط سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

یعنی ن س کی ق اور ط پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

نیز ق ط کی ن اور س پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

(۲) جبکہ ن دائرہ کے اندر ہو، ملاحظہ ہو شکل (۲)

فرض کرو کہ ن کا قطبی س ل ہے۔

اب چونکہ ن کا قطبی س میں سے گذرتا ہے اِس لئے س کا قطبی ن میں سے گذرے گا، اِس لئے صورت اول کی رو سے ق ط کی س اور ن پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

اِس مسئلہ کو قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت سے موسوم کرتے ہیں۔

تعریف

اگر ایک مثلث اور دائرہ میں ایسا رشتہ ہو کہ مثلث کا ہر ایک ضلع مقابل کے راس کا قطبی ہو تو مثلث کو بلحاظ دائرہ کے مزدوج بالذات کہتے ہیں۔

قطب اور قطبی کے متعلق مشقیں

۱۔ دو نقطوں کو جو خط ملاتا ہے وہ بلحاظ ایک دئے ہوئے دائرہ کے ان کے قطبیوں کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہوتا ہے۔

۲۔ کسی دو خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع ان کے قطبوں کے ملانے والے خط کا قطب ہوتا ہے۔

۳۔ ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے جو خط گذرتے ہیں ان کے قطبوں کا طریق معلوم کرو۔

۴۔ ایک دائرہ دیا ہوا ہے، نیز ایک ہم مرکز دائرہ ہے جس کے مماس کھینچے گئے ہیں، ان مماسوں کے قطبوں کا طریق بلحاظ دائرہ معلومہ کے دریافت کرو۔

۵۔ دو دائرے ایکدوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں اور ان میں سے ایک کا کوئی قطر ن ق ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا قطبی بلحاظ دوسرے دائرہ کے ق میں سے گذرتا ہے۔

۶۔ دو دائرے ایکدوسرے کو علی القوائم کاٹتے ہیں، ثابت کرو کہ ہر دائرہ کا مرکز بلحاظ دوسرے دائرہ کے ان کے وتر مشترک کا قطب ہے۔

۷۔ کسی دو نقطوں کے سامنے دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے وہ ان کے قطبیوں کے درمیانی زاویوں میں سے ایک زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۸۔ ایک دئے ہوئے دائرہ کا مرکز و ہے اور ا ب ایک ثابت خط مستقیم ہے
ا ب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے، دئے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ن کا

جو مقلوب ہے اس کا طریق معلوم کرو۔

۹۔ ایک دائرہ دیا گیا ہے اور اس کے محیط پر ایک ثابت نقطہ و ہے ن ایک اور نقطہ اسکے محیط پر ہے۔ ن کے مقلوب نقطہ کا طریق بلحاظ کسی دائرہ کے جس کا مرکز و ہو معلوم کرو۔

۱۰۔ دو نقطے ا اور ب معلوم ہیں، نیز ایک دائرہ دیا گیا ہے جس کا مرکز و ہے۔ ثابت کرو کہ و ا اور اس عمود کا حاصل ضرب جو ب سے ا کے قطبی پر کھینچا جائے مساوی ہے و ب اور اس عمود کے حاصل ضرب جو ا سے ب کے قطبی پر کھینچا جائے۔

۱۱۔ چار نقطے ا، ب، ج، د ترتیب وار ایک دائرہ کے محیط پر لئے گئے ہیں، د ا، ج ب نقطہ ن پر قطع کرتے ہیں، ا ج، ب د نقطہ ق پر اور ب ا، ج د نقطہ ر پر۔ ثابت کرو کہ مثلث ن ق ر بلحاظ دائرہ کے مزدوج بالذات ہے۔

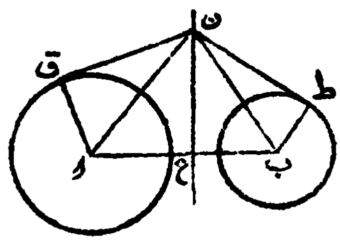
۱۲۔ بلحاظ ایک دائرہ کے ایک نقطہ کا قطبی معلوم کرنا ہے، اسکے لئے کوئی خطی ترکیب بتاؤ۔ اس طرح کسی نقطہ بیرونی سے مماس کھینچنے کی خطی ترکیب حاصل کرو۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث بلحاظ ایک دائرہ کے مزدوج بالذات ہو تو دائرہ کا مرکز مثلث کے عمودی مرکز پر ہوگا۔

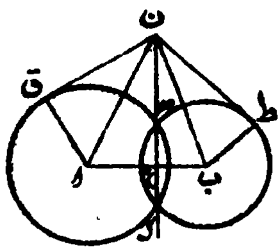
۱۴۔ موسیقی صف کے چار نقطوں کے قطبی بلحاظ ایک دائرہ کے ایک موسیقی بنسلی بناتے ہیں اور برعکس اسکے۔

۷۔ بنیادی محور

مثال ۱۔ جن نقطوں سے دو معلومہ دائروں کے مساوی مماس کھینچ سکیں اُن کا طریق معلوم کرو۔



شکل ۱



شکل ۲

فرض کرو کہ ا اور ب دائروں کے مرکز ہیں اور ان کے نیم قطر بالترتیب اَ، بَ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ن ایسا نقطہ جس سے دائرہ (ا) کا مماس ن ق مساوی ہے دائرہ (ب) کے مماس ن ط کے۔

ن کا طریق مطلوب ہے۔

ن ا، ن ب، ا ق، ب ط، ا ب کو ملاؤ۔

ن سے ا ب پر عمود ن ع کھینچو۔

اب ن ق = ن ط اسلئے ن ق^2 = ن ط^2

لیکن ن ق^2 = ن ا^2 - ا ق^2 اور ن ط^2 = ن ب^2 - ب ط^2

[مسئلہ ۲۹]

اسلئے ن ا^2 - ا ق^2 = ن ب^2 - ب ط^2

یعنی ن ع^2 + ع ا^2 - اَ^{2} = ن ع^2 + ع ب^2 - بَ^{2}

[مسئلہ ۲۹]

یا ا ع^2 - اَ^{2} = ع ب^2 - بَ^{2}

پس ا ب، ع پر اس طرح تقسیم ہوتا ہے کہ ا ع^2 - ع ب^2 = اَ^{2} - بَ^{2}

اس لئے ع ایک ثابت نقطہ ہے۔

پس وہ تمام نقطے جن سے دو دائروں کے مساوی مماس کھینچ سکتے ہیں ایک ایسے خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو اب پر عمود وار ہے اور اب کو ایسے دو حصوں میں قطع کرتا ہے جن کے مربعوں کا فرق نیم قطروں کے مربعوں کے فرق کے مساوی ہے۔

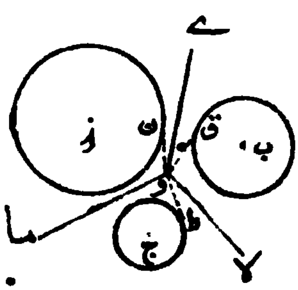
اوپر کے عمل میں اُلٹے پاؤں پیروی کرنے سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ شکل (۱) میں ع ن پر کا ہر ایک نقطہ اور شکل (۲) میں ع ن پر کا ہر نقطہ جو دائروں کے باہر ہے ایسا نقطہ ہے کہ اس سے اگر ان دو دائروں تک مماس کھینچے جائیں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔

اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ شکل (۱) میں سارا خط ع ن طریق مطلوب ہے اور شکل (۲) میں ع ن کا وہ حصہ طریق مطلوب ہے جو دائروں کے باہر ہے۔

ہر صورت میں ع ن کو دائروں کا **بنیادی محور** کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں جیسے شکل ۲ میں تو ظاہر ہے کہ بنیادی محور وہی خط ہے جو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے اور اشتاقی مسئلہ ۵۸ کی رو سے ہم بآسانی دیکھ سکتے ہیں کہ اگر وتر مشترک کے کسی نقطہ سے دو متقاطع دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو یہ باہم مساوی ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ تین دائروں میں سے دو دو کے تین بنیادی محور ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔



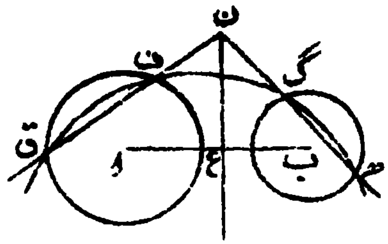
فرض کرو کہ تین دائرے ہیں جن کے مرکز ا، ب، ج ہیں۔
و ے دائروں (ا) اور (ب) کا بنیادی محور ہے۔
و ما " (ا) اور (ج) کا " "
اور ان کا نقطہ تقاطع و ہے۔
یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ دائروں (ب) اور (ج) کا بنیادی محور نقطہ و میں سے گذرتا ہے۔
اب نقطہ و کو یا تو تینوں دائروں کے باہر واقع ہونا چاہئے یا تینوں کے اندر۔
۱۔ جبکہ و دائروں کے باہر واقع ہو۔
و سے تینوں دائروں کے مماس ون، وق، وط کھینچو۔ چونکہ نقطہ و دائروں (ا) اور (ب) کے بنیادی محور پر واقع ہے اسلئے

ون = وق

نیز نقطہ و دائروں (ا) اور (ج) کے بنیادی محور پر واقع ہے اسلئے

ون = وط

اسلئے وق = وط یعنی و دائروں (ب) اور (ج) کے بنیادی محور پر واقع ہے یعنی (ب) اور (ج) کا بنیادی محور و میں سے گذرتا ہے۔
۲۔ اگر دائرے اس طرح قطع کریں کہ و تینوں دائروں کے اندر واقع ہو تو بنیادی محور تین دائروں میں سے دو دو کے مشترک وتر ہوں گے اور ہمیں یہ ثابت کرنا ہوگا کہ یہ تینوں ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ اسلئے ہندسۂ مثبت سے مسئلہ اثباتی ۷، ۵ کی مدد سے اسے ہم ثابت کرسکتے ہیں۔
تعریف۔ تین دائروں میں سے دو دو کو اکٹھا لینے سے تین بنیادی محور حاصل ہوتے ہیں۔ ابھی ہم نے ثابت کیا ہے کہ یہ تینوں محور ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ اس نقطہ کو **بنیادی مرکز** کہتے ہیں۔
مثال ۳۔ دو معلومہ دائروں کے بنیادی محور کھینچنے کا عمل معلوم کرو۔



فرض کرو کہ ا اور ب دائروں کے مرکز ہیں۔
دائروں کا بنیادی محور دریافت کرنا مطلوب ہے۔
(ا) اگر دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں تو ان کے نقاط تقاطع میں سے گذرنے والا خط بنیادی محور ہوگا۔
(ب) لیکن اگر دائرے ایکدوسرے کو نہ کاٹیں تو کوئی دائرہ کھینچو جو انہیں ق ف اور گ، ھ پر کاٹے۔ ق ف اور ھ گ کو ملاؤ اور ان کو اتنا خارج کرو کہ یہ ن پر ملیں۔
ا ب کو ملاؤ اور ن سے ا ب پر عمود ن ع کھینچو۔
تب ن ع دائروں (ا) اور (ب) کا بنیادی محور ہوگا۔
ثبوت۔ دائرہ ق ف گ ھ سے ن ق × ن ف = ن ھ × ن گ
ن سے دائرہ (ا) کے مماس کا مربع = ن ق × ن ف
اور ن سے دائرہ (ب) کے مماس کا مربع = ن ھ × ن گ
پس ن سے دائروں (ا) اور (ب) کے مماس مساوی ہیں۔
اس لئے ن بنیادی محور پر واقع ہے اور چونکہ ن ع مرکزوں کے خط پر عمود وار ہے اس لئے ن ع بنیادی محور ہے۔
تعریف۔ اگر دائروں کا ایک نظام ایسا ہو کہ اس کے کسی دو دائروں کا بنیادی محور وہی ہو تو اس کو دائروں کا ہم محور نظام کہتے ہیں اور یہ سب دائرے ہم محور دائرے کہلاتے ہیں۔

بنیادی محور پر مشقیں

۱- ثابت کرو کہ دو دائروں کا بنیادی محور ان کے کسی مشترک مماس کی تنصیف کرتا ہے۔

۲- دو دائروں کے بنیادی محور کے کسی نقطہ سے مماس کھینچے گئے ہیں، اگر اس نقطہ کو مرکز اور کسی ایک مماس کو نصف قطر مان کر دائرہ کھینچا جائے تو یہ دونوں دائروں کو علی القوائم کاٹے گا۔ [ملاحظہ ہو تعریف صفحہ ۱۲۲]

۳- و تین دائروں کا بنیادی مرکز ہے، و سے کسی ایک دائرہ کا مماس و م کھینچا گیا ہے، اگر و کو مرکز اور و م کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ تینوں دائروں کو علی القوائم کاٹتا ہے۔

۴- اگر تین دائروں میں سے کوئی دو دو ملکر ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ نقاط تماس پر ان کے مشترک مماس ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

۵- مثلث کے اضلاع کو قطر مان کر تین دائرے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا بنیادی مرکز مثلث کا عمودی مرکز ہے۔

۶- وہ سب دائرے جو ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے اور ایک دائرہ معلومہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں ایک اور ثابت نقطہ میں سے بھی گذرتے ہیں۔

۷- ان سب دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دئیے ہوئے نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور ایک دائرہ معلومہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں۔

۸- دائرہ کھینچو جو دو نقاط معلومہ میں سے گذرے اور ایک دائرہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹے۔

۹- ان دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو دو معلومہ دائروں کو علی القوائم کاٹیں۔

۱۰- دائرہ کھینچو جو ایک نقطہ معلومہ میں سے گذرے اور دو دائروں کو علی القوائم کاٹے۔

۱۱- کسی نقطہ سے دو دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

اِن مماسوں کے مربعوں کا فرق = دو چند مرکزوں کے ملانے والے خط کا طول × اِس عمود کا طول جو نقطہ مذکورہ سے دائروں کے بنیادی محور تک کھینچا جائے۔

۱۲۔ ہم محور دائروں کا نظام ہے، یہ دائرے باہم قطع نہیں کرتے۔ کوئی نقطہ اِن کے بنیادی محور پر لیا گیا ہے اور اِس نقطہ سے کسی دائرہ کا مماس کھینچا گیا ہے، اگر اِس نقطہ کو مرکز اور مماس کو نیم قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ مرکزوں کے ملانے والے خط کو دو ثابت نقطوں پر کاٹے گا۔

[اِن ثابت نقطوں کو نظام کے **انتہائی نقطے** کہتے ہیں]

۱۳۔ ہم محور دائروں کے نظام میں دو انتہائی نقطے اور وہ نقطے جہاں پر نظام کا کوئی دائرہ مرکزوں کے ملانے والے خط کو کاٹتا ہے ملکر موسیقی صف بناتے ہیں۔

۱۴۔ ہم محور دائروں کے نظام میں کسی انتہائی نقطے کا قطبی بلحاظ تمام دائروں کے وہی ہوتا ہے۔

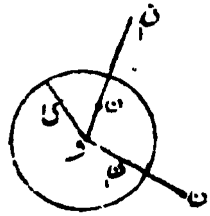
۱۵۔ اگر دو دائرے زاویہ قائمہ پر کاٹیں تو ان میں سے کوئی ایک دوسرے دائرہ کے کسی قطر کی موسیقی تقسیم کرتا ہے۔

۸۔ تقلیب (یا الٹانا)

تعریفیں

۱۔ ایک ثابت نقطہ و میں سے ایک خط مستقیم و ن کھینچا گیا ہے اور و ن یا و ن ممدودہ پر ایک ایسا نقطہ ن لیا گیا ہے کہ

و ن × و نَ = ک^۲ جہاں ک مستقل ہے۔ نقاط ن اور نَ میں سے کسی ایک کو دوسرے نقطہ کا مقلوب کہتے ہیں بلحاظ اُس دائرہ کے جس کا مرکز و ہے اور نیم قطر ک۔

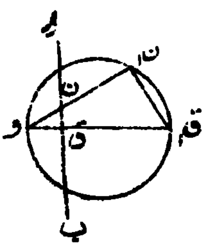


۲۔ و کو تقلیب کا مبدأ اور ک کو تقلیب کا نیم قطر کہتے ہیں۔ ک۲ بعض اوقات تقلیب کے مستقل کے نام سے موسوم ہوتا ہے۔

۳۔ اگر ن کوئی طریق مرتسم کرے تو ن۱ کے ہر محل کے جواب میں ن۱ کا متناظر مقام یا محل ہوگا اور ن۱ جس طریق کو مرتسم کرے گا اسکو ن کے طریق کا مقلوب کہینگے۔

تعریف ۱ سے ظاہر ہے کہ مبدأ میں سے گذرنے والا ہر خط اپنا خود مقلوب ہے۔

مثال ۱۔ ایک خط مستقیم تقلیب کے مبدأ میں سے نہیں گزرتا، اس کا مقلوب معلوم کرو۔



فرض کرو کہ دئے ہوئے خط اب پر کوئی نقطہ ن ہے، و مبدأ ہے اور ک تقلیب کا نیم قطر ہے۔

خط اب پر عمود وق کھینچو، ن اور ق کے مقلوب ن۱ اور ق۱ بالترتیب معلوم کرو، ن۱ ق۱ کو ملاؤ تب

و ن × و ن۱ = و ق × و ق۱

اس لئے نقاط ن، ن۱، ق، ق۱ میں سے دائرہ گذر سکتا ہے

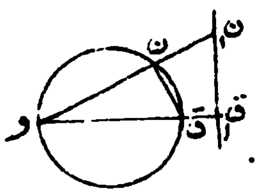
اس لئے ∠ و ن۱ ق۱ = ∠ و ق ن

= زاویہ قائمہ

پس معلوم ہوا کہ ن۱ کا طریق ایک دائرہ ہے جو و میں سے گزرتا ہے اور اس کا قطر و ق دئے ہوئے خط اب پر عمود وار ہے۔

مثال ۲۔ دائرہ کا مقلوب معلوم کرو بلحاظ ایک ایسے نقطہ کے جو اس کے محیط پر واقع ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ معلومہ کا و ق قطر ہے جو مبدأ و میں سے گذرتا ہے۔



کوئی نقطہ ن محیط پر لو،
تقلیب کے نیم قطر ک کے لحاظ سے فرض کرو کہ ق اور ن کے مقلوب بالترتیب ق۱ اور ن۱ ہیں۔

ن ق اور ن۱ ق۱ کو ملاؤ۔

تب و ن × و ن۱ = $ک^2$

= و ق × و ق۱

اس لئے نقاط ن، ن۱، ق، ق۱ میں سے دائرہ گذر سکتا ہے

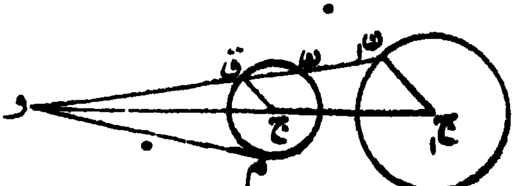
اسلئے ∠ و ق۱ ن۱ = ∠ و ن ق

= زاویہ قائمہ

اس لئے ن۱ ق۱ عمود وار ہے و ق پر

پس ن۱ کا طریق خط مستقیم ہے جو مبدأ میں سے گذرنے والے قطر پر عمود وار ہے۔

مثال ۳۔ دائرہ کا مقلوب معلوم کرو بلحاظ ایسے نقطہ کے جو محیط پر واقع نہیں ہوتا۔



و مبدأ ہے، دئے ہوئے دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ن ہے۔

فرض کرو کہ ن کا مقلوب نَ ہے یعنی ون × ونَ = ک^2

ون دوبارہ دائرہ معلومہ سے ق پر ملتا ہے، ق ج کو ملاؤ، دائرہ کا مماس وم کھینچو اور فرض کرو کہ وم = م

تب ون × ونَ = ک^2 اور ون × وق = م^2

اس لئے $\frac{\text{ون} \times \text{ونَ}}{\text{ون} \times \text{وق}} = \frac{\text{ک}^2}{\text{م}^2}$

یعنی ونَ : وق = ک^2 : م^2

نَ جَ کو ق ج کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ وج سے جَ پر ملتا ہے۔

تب وجَ : وج = ونَ : وق

= ک^2 : م^2

اس لئے جَ ثابت نقطہ ہے۔

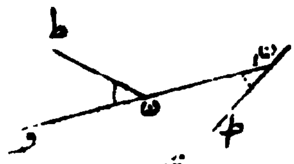
نیز جَ نَ : ج ق = ونَ : وق

= ک^2 : م^2

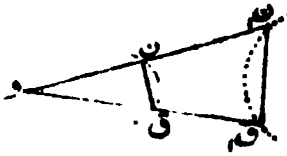
ش جَ نَ مستقل ہے اور نَ کا طریق دائرہ ہے جس کا مرکز جَ ہے

نتیجہ صحیح ۔ مبدأ، دائرہ اور اس کے مقلوب کا مرکز مشابہت ہے۔

مثال ۴ ۔ تقلیب کے مبدأ میں سے گذرنے والا کوئی خط مستقیم دو مقلوب طریقوں کو ایک ہی زاویہ پر کاٹتا ہے جو خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہوتے ہیں۔



شکل ۲



شکل ۱

فرض کرو کہ ن اور ق دو نقطے طریق پر ہیں اور ن۱، ق۱ انکے مقلوب ہیں بلحاظ و کے، تب

و ن × و ن۱ = ک² = و ق × و ق۱

اس لئے نقاط ن، ن۱، ق، ق۱ دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔ اب فرض کرو کہ ق حرکت کرتے کرتے ن کے قریب آجاتا ہے یعنی ق ن بالآخر ن کے طریق کا ن پر مماس ہو جاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ ساتھ ہی خط مستقیم ق۱ ن۱، ن۱ کے طریق کا ن۱ پر مماس ہو جائے گا۔

اس لئے شکل ۲ میں اگر ن ط اور ن۱ ط۱ نقاط ن اور ن۱ پر کے مماس ہوں تو ∠ و ن ط = ∠ و ن۱ ط۱ یعنی خط و ن ن۱، ن اور ن۱ کے طریقوں کو خط و ن ن۱ کی مقابل کی جانبوں میں ایک ہی زاویہ پر کاٹتا ہے۔

نتیجہ صحیح۔ دو منحنیوں کے درمیان ان کے نقطۂ تقاطع پر جو زاویہ بنتا ہے وہ مقلوب نقطہ پر ان کے مقلوبوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے نیز اگر دو منحنی ن پر باہم مس کریں تو ان کے مقلوب بھی مقلوب نقطہ ن۱ پر مس کرینگے۔

مثال ۵۔ دو نقطوں کے مقلوبوں کے باہمی فاصلہ کو ان نقطوں کے درمیانی فاصلہ کی رقوم میں، اور ان معلوم نقطوں کے جو فاصلے مبدأ سے ہیں ان کی رقوم میں معلوم کرو۔

[شکل امثال ۴] ن۱، ق۱ مقلوب ہیں بالترتیب ن اور ق کے

اس لئے و ن × و ن۱ = ک۲ = و ق × و ق۱

اور متشابہ مثلثوں و ن ق اور و ق۱ ن۱ سے

(ن۱ ق۱)/(ن ق) = (و ن۱)/(و ق) = (و ن × و ن۱)/(و ن × و ق) = (ک۲)/(و ن × و ق)

اس لئے ن۱ ق۱ = (ک۲ × ن ق)/(و ن × و ق)

مشقیں تقلیب سے متعلق

۱۔ و، ن، ق، ط ہم خط نقطے ہیں اور ن۱، ق۱، ط۱ بالترتیب بلحاظ نقطہ و کے ن، ق، ط کے مقلوب ہیں، ثابت کرو کہ

(۱) اگر و ن، و ق، و ط سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو و ن۱، و ق۱، و ط۱ سلسلہ موسیقیہ میں ہوں گے۔

(۲) اگر و ن، و ق، و ط سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو و ن۱، و ق۱، و ط۱ سلسلہ ہندسیہ میں ہوں گے۔

۲۔ مثلث متساوی الساقین کے راس کو مبدأ مان کر مثلث کے محائط دائرہ کا مقلوب معلوم کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ و کے لحاظ سے جس کو مبدأ مانا جائے دائرہ خود اپنے آپ میں الٹ سکتا ہے۔

[و سے جو دائرہ کا مماس ہو ک کو اس کے طول کے برابر لو]

۴۔ ثابت کرو کہ دائرہ خود اپنے آپ میں منقلب ہو سکتا ہے اگر کسی علی القوائم دائرہ کے مرکز کو مبدأ مانا جائے۔

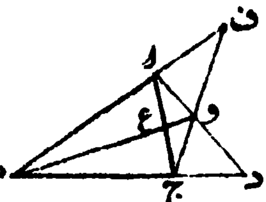
۵۔ ا ب ایک دائرہ کا قطر ہے، اس کی تنصیف و پر ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر و کو مرکز اور و ا کو تقلیب کا نیم قطر مانا جائے تو دائرہ خود اپنے آپ میں الٹ سکیگا۔

۶- ثابت کرو کہ کوئی دو دائرے خود اپنے آپ میں الٹائے جا سکتے ہیں۔
[ملاحظہ ہو مثال ۱ صفحہ ۱۳۱، مبدأ و کو ع ن پر لو اور و سے جو مماس ہے اسکے طول کے مساوی ک فرض کرو]
۷- ثابت کرو کہ کوئی تین دائرے اپنے آپ میں الٹائے جا سکتے ہیں
[ملاحظہ ہو مثال ۲، صفحہ ۱۴۲]
۸- خط مستقیم ایک دائرہ کو کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ مبدأ اور تقلیب کے مستقل کے مناسب انتخاب کرنے سے ان میں سے کوئی ایک، دوسرے میں الٹایا جا سکتا ہے۔
۹- ثابت کرو کہ کوئی تین دائرے ایسے دائروں میں الٹائے جا سکتے ہیں جن کے مرکز ایک ہی خط میں واقع ہوں۔
[ملاحظہ ہو سوال ۳، صفحہ ۱۳۵، الٹانے کے مبدأ کو علی القوائم دائرہ پر لو۔]
۱۰- ثابت کرو کہ ایک دائرے کے قطر ایسے ہم محور دائروں کے سلسلہ میں الٹائے جا سکتے ہیں جو دائرہ معلومہ کے مقلوب کے علی القوائم ہوں۔
۱۱- ن، ق، ط تین نقطے ترتیب وار ایک خط مستقیم پر ہیں۔ ذیل کے بیان کا مقلوب معلوم کرو۔

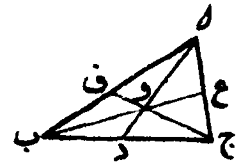
ن ق + ق ط = ن ط

۹- سیوا کا مسئلہ

مثلث کے راسوں میں سے تین ہم نقطہ خط کھینچے گئے ہیں جو متقابل کے اضلاع سے ملتے ہیں، اگر اضلاع کے حصوں کو ایک ہی ترتیب میں لیا جائے تو ثابت کرو کہ کسی تین متبادل حصوں کا حاصل ضرب باقی تین متبادل حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔



شکل ۲



شکل ۱

فرض کرو کہ ا د ، ب ع ، ج ف مثلث ا ب ج کے راسوں سے کھینچے گئے ہیں اور یہ ایک دوسرے کو و پر اور مقابل کے اضلاع کو د ، ع ، ف پر کاٹتے ہیں -

یہ ثابت کرنا ہے کہ

ب د × ج ع × ا ف = د ج × ع ا × ف ب

مثلثوں ا و ب ، ا و ج کا قاعدہ ا و مشترک ہے اور ب اور ج سے ا د پر عمود گرانے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

ب د : د ج = △ ا و ب کا ارتفاع : △ ا و ج کا ارتفاع

$$\therefore \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\triangle\,\text{ا و ب}}{\triangle\,\text{ا و ج}}$$

اسی طرح سے

$$\frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} = \frac{\triangle\,\text{ب و ج}}{\triangle\,\text{ب و ا}}$$

اور

$$\frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\triangle\,\text{ج و ا}}{\triangle\,\text{ج و ب}}$$

ان نسبتوں کو باہم ضرب دینے سے

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = 1$$

یعنی ب د × ج ع × ا ف = د ج × ع ا × ف ب

اِس مسئلہ کا عکس جو الٹے عمل سے ثابت ہو سکتا ہے نہایت ضروری ہے۔ اس کا دعوے یہ ہے۔

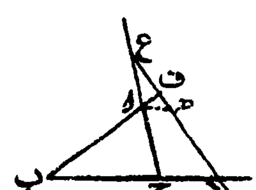
اگر مثلث کے راسوں میں سے تین خط کھینچے جائیں جو متقابل کے اضلاع کو ایسے حصوں میں تقسیم کریں کہ ترتیب وار کسی تین متبادل حصوں کا حاصل ضرب باقی کے تین حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہو تو یہ تینوں خط ہم نقطہ ہوں گے۔

یعنی اگر ب د × ج ع × ا ف = د ج × ع ا × ف ب

تو ا د، ب ع، ج ف ہم نقطہ ہوں گے۔

۱۰۔ مینی لاس کا مسئلہ

اگر ایک خط مستقیم (قاطع) مثلث کے تین اضلاع کو یا اضلاع مخروجہ کو کاٹے تو ترتیب وار تین متبادل حصوں کا حاصل ضرب باقی تین حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا۔



شکل ۲



شکل ۱

دیا ہوا مثلث ا ب ج ہے، اور قاطع خط اضلاع ب ج، ج ا، ا ب سے یا اضلاع مخروجہ سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتا ہے۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ ب د × ج ع × ا ف = د ج × ع ا × ف ب

اھ کو ب ج کے متوازی کھینچو اور اتنا بڑھاؤ کہ یہ قاطع سے ھ پر ملے

متشابہ مثلثوں د ف ب، ھ ا ف سے

$$\frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ا ھ}}{\text{ب د}}$$

اور متشابہ مثلثوں د ج ع، ھ ا ع سے

$$\frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ا ھ}}$$

اس لئے ضرب دینے سے

$$\frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ب د}}$$

یعنی

$$\frac{\text{ب د} \times \text{ج ع} \times \text{ا ف}}{\text{د ج} \times \text{ع ا} \times \text{ف ب}} = 1$$

یا ب د × ج ع × ا ف = د ج × ع ا × ف ب

نوٹ۔ اس مسئلہ میں قاطع کو دو اضلاع سے اور تیسرے ضلع ممدودہ سے ملنا چاہئے (شکل ۱) یا تینوں اضلاع ممدودہ سے ملنا چاہئے (شکل ۲)

اس مسئلہ کا عکس الٹے ثبوت سے حاصل ہو سکتا ہے۔

اگر تین نقطے بالترتیب مثلث کے دو اضلاع پر اور تیسرے ضلع ممدودہ پر یا تینوں اضلاع ممدودہ پر لئے جائیں اور یہ نقطے اضلاع کو اس طرح تقسیم کریں کہ ترتیب وار تین متبادل حصوں کا حاصل ضرب مساوی ہو باقی تین حصوں کے حاصل ضرب کے تو یہ نقطے ہم خط ہوں گے۔

تعریفیں

۱- اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ ان کے متناظر راسوں کے ملانے والے تین خط ہم نقطہ ہوں تو ان کو ہم قطبی کہتے ہیں۔
۲- اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ ان کے متناظر اضلاع کے تین نقاط تقاطع ہم خط ہوں تو مثلثوں کو ہم محور کہتے ہیں۔

مشقیں

۱- سیوا کے مسئلہ کی مدد سے مثلث کی مندرجہ ذیل خاصیتیں ثابت کرو۔
(۱) اضلاع کے وسطی نقاط سے اضلاع پر جو عمود کھینچے جائیں وہ ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔
(۲) زاویوں کے منصف ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔
(۳) مثلث کے وسطی خطوط (وسطانئے) ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

۲- مثلث کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو بالترتیب د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ اگر ع ف، ف د، د ع بالترتیب ان اضلاع سے ن، ق، ط پر ملیں تو ثابت کرو کہ ن، ق، ط ہم خط ہیں۔

۳- مثال ۲ کی ترمیم کے مطابق ثابت کرو کہ ب، د، ج، ن موسیقی صف بناتے ہیں۔

۴- اگر مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کے مماس نقاط ا، ب، ج پر کھینچے جائیں اور یہ مقابل کے اضلاع سے بالترتیب د، ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$ب د : ج د = ب ا^2 : ا ج^2$$

اس سے ثابت کرو کہ د، ع، ف ہم خط ہیں۔

۵- وہ خط جو مثلث کے راسوں کو اندرونی دائرہ (یا تین خارجی دائروں

میں سے کسی دائرہ) کے نقاط تماس سے ملاتے ہیں ہم نقطہ ہوتے ہیں ۔

۶ ۔ مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے قطروں کے وسطی نقاط ہم خط ہوتے ہیں
[ملاحظہ ہو تعریف ۴ صفحہ ۱۱۷]

۷ ۔ ثابت کرو کہ مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے کوئی دو قطر تیسرے قطر کی توسیقی تقسیم کرتے ہیں ۔

۸ ۔ ہم قطبی مثلث ہم محوری بھی ہوتے ہیں اور برعکس اسکے ہم محور مثلث ہم قطبی بھی ہوتے ہیں ۔

۹ ۔ تین دائروں کے چھ مشابہت کے مرکز ہوں گے ، ثابت کرو کہ ان میں سے تین تین ملکر چار خطوط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں ۔

جوابات (ہندسہ ہال اینڈ سٹیونز) حصہ پنجم

مشقیں، صفحہ ۹

۱- (۱) ۳۵ (۲) ۸ (۳) ۲

۳- ۴٫۰″، ۵٫۲″   ۴- ۱۲٫۵ سنتی میتر، ۱۲٫۰ سنتی میتر

۵- ۴٫۰ سنتی میتر، ۲٫۴ سنتی میتر، ۱۶٫۰ سنتی میتر، ۹٫۶ سنتی میتر

مشقیں، صفحہ ۱۵

۱- (۱) ہر نسبت = ۲ : ۳ (۲) ہر نسبت = ۳ : ۵ (۳) ہر نسبت ۲ : ۵

۲- (۱) ۴٫۱″ (۲) ۸٫۰″ (۳) ۶٫۴ سنتی میتر، ۲٫۴ سنتی میتر

۳- (۱) ۵٫۶ سنتی میتر (۲) ۷٫۷ سنتی میتر، ۲٫۸ سنتی میتر

مشقیں، صفحہ ۱۶

۱- ۹٫۰″، ۶٫۰″، ۴٫۵″، ۳٫۰″، ۳ : ۲

۲- ۲٫۰ سنتی میتر، ۱٫۵ سنتی میتر، ۱۴٫۰ سنتی میتر، ۱۰٫۵ سنتی میتر

مشقیں، صفحہ ۲۱

۱- (۱) ۲٫۱″ (۲) ۲٫۰″ (۳) ۷٫۷ سنتی میتر

۲- (۱) ۱٫۲″ (۲) ۴٫۳ سنتی میتر

۳- ق ب = ۳٫۵″، ب ط = ۲٫۵″

۴- ۳٫۲ سنتی میتر، ۴٫۲ سنتی میتر   ۵- ۱٫۲″، ۱٫۸″

۶- ۵ فٹ، ۱۲ ۳/۴ فٹ، ۹ ۱/۴ فٹ   ۷- ۱٫۲″، ۱٫۳″، ۱٫۹۵″

۸- ۵ ۵/۸ سنتی میتر   ۹- ۱۰٫۰ سنتی میتر، ۱۴٫۰ سنتی میتر، ۱۱٫۲ سنتی میتر

مشقیں، صفحہ ۳۵

۱۔ ۱۷، ۸/۱۷ ، ۱۵/۱۷ ، ۸/۱۵

۲۔ ۳۷، جیب = ۱۲/۳۷ ، جیب التمام = ۳۵/۳۷ ، مماس = ۱۲/۳۵

۴۔ ۱۲/۱۳ ، ۵/۱۳ ، ۷۷/۸۵ ، ۷۷/۳۶ ۶۔ °۳۷

۷۔ °۳۵ ، °۲۶ ، °۴۵ ۸۔ ا = °۵۸ ، جم ا = ۵۳٫

۱۰۔ اج = ۸٫۷، ا = °۳۹ ، جا ا = ۰٫۶۳ ، جم ا = ۰٫۷۸

۱۱۔ ۳٫۴ ، °۳۵

مشقیں، صفحہ ۴۴

۱۔ (۱) ۱٫۰″ (۲) ۹٫۵″ (۳) ۶٫۰ سنتی میتر

۲۔ ۴٫۱″ ، ۶٫۰″ ، ۳٫۵″ ، ۵٫۱″ ۳۔ (۱) ۲٫۰ ، (۲) ۲٫۸ ، (۳) ۰

۴۔ ۶٫۱ سنتی میتر، ۴٫۲ سنتی میتر، ۲٫۳ سنتی میتر

۵۔ ۸٫۱″ ، ۲٫۱″ ، ۹٫۵″ ۶۔ ۲٫۷″

۷۔ (۱) ۱٫۷۳ (۲) ۳٫۱۶ (۳) ۱٫۶۷

۸۔ (۱) ۳ (۲) ۳٫۲۱ (۳) ۲٫۲۶

۹۔ (۱) ۲٫۱″ ، ۶٫۱″ ، ۲٫۰″ (۲) ۳٫۰ سنتی میتر، ۶٫۳ سنتی میتر،
۴٫۵ سنتی میتر۔ (۳) ۲٫۵ سنتی میتر، ۴٫۳ سنتی میتر، ۵٫۰ سنتی م
(۴) ب = ۳٫۴″ ، ج = ۲٫۱″ تقریباً

مشقیں، صفحہ ۴۵

۱۔ ۱۴۰ میتر، ۱۶۰ میتر، ۱۲۵ میتر ۲۔ ۱/۲ ۱۲ گز

۳۔ ۱/۲ ۴۲ میل ۴۔ ۳۰ فٹ، ۴ فٹ

۵۔ ۲۴ فٹ، ۲ فٹ ۴ انچ ۶۔ ۶۰ فٹ

۷ — ۷۲ فٹ　　　۸ — ۱۰۲ فٹ

مشقیں، صفحہ ۵۳

۳ — ۰٫۵۲　　　۵ — ۳۱ : ۲۸ تقریباً

مشقیں، صفحہ ۵۸

۱ — ۱۰۱٫۵ مربع انچ　　　۲ — ۳٫۰ سنتی میٹر

۳ — ۶۴ مربع سنتی میٹر　　　۴ — ۱۱٫۰ً

۵ — ۳۳٫۹ ایکڑ

مشقیں، صفحہ ۶۰

۶ — ۴٫۹ سنتی میٹر　　　۷ — ۸٫۰ سنتی میٹر

مشقیں، صفحہ ۶۳

۱ — ۱/۴　　　۲ — ۲۰ مربع فٹ　　　۳ — ۱۰ مربع سنتی میٹر

۴ — ۵۱۷　　　۵ — ۵۱۶ً

مشقیں، صفحہ ۶۷

۲ — ۳٫۴۶ً، ۳۳٫۴ً، ۵٫۵۴ً　　　۳ — ۹ فٹ ۳ انچ

۴ — ۳٫۷۵ مربع سنتی میٹر　　　۵ — ۴٫۵ سنتی میٹر

۶ — ۱۵٫۴۰ مربع انچ　　　۷ — ۳٫۶ میٹر، ۱٫۵

۸ — ۹۰ ایکڑ　　　۹ — ۵۱۲ ایکڑ

۱۰ — ۱ سنتی میٹر ۱۵ میٹروں کو تعبیر کرتا ہے۔

مشقیں، صفحہ ۶۸

۲ — ۱ : ۲۴　　　۶ — ۱/۶۴　　　۷ — ۲۵۶ : ۸۱

مشقیں، صفحہ ۷۱

۳۔ ۲،۵ مربع سنتی میٹر، ۶،۴ مربع سنتی میٹر

۴۔ ۱:۴ ۵۔ ۲،۷" ۸۔ ۶،۲ سنتی میٹر، ۳،۸ سنتی میٹر

مشقیں، صفحہ ۷۴

۱۔ ۱ : √۲ ۳۔ ۴،۶ سنتی میٹر ۴۔ ۶،۹ سنتی میٹر

مشقیں، صفحہ ۷۷

۱۔ ۱۱،۵۶ مربع انچ

۲۔ (۱) ۱۰۰ (۲) ۵۷۶ رقبہ کی اکائیاں (۳) ۱۸،۵

۳۔ (۱،۳، ۲،۴)، (۱،۳-، ۲،۴)، ۴،۸، ۲،۴ تقریباً

مشقیں، صفحہ ۸۱

۱۰۔ (۱) ۱۰ ۵/۶ ً (۲) ۱۵ ۵/۸ فٹ

مشقیں، صفحہ ۹۵

۱۔ ۱۵، (۸، ۶) ۲۔ ۱۵، ۳،۷۵، (۲۰،۰)، (۵،۰)

۳۔ ۰،۸۳" ۴۔ ۱،۱۷ً

۶۔ ۰،۵۵" ۷۔ ۰،۹۳ً

مشقیں، صفحہ ۱۰۱

۱۔ ۱۵،۳ مربع سنتی میٹر ۲۔ ۸،۵۵ً

۳۔ ۴۳،۳۰ مربع سنتی میٹر ۴۔ ۹۰°

۸۔ ۶،۸۳ً، ۱،۱۷ً ۱۰۔ ۲۰،۷۸ مربع سنتی میٹر، ۲۰،۱۸ سنتی میٹر

١٢ - ٥٦° ١٤ - ١٫٢″، ٢٢ ½°

١٥ - ٦٣ فٹ ١٦ - ١٨ مربع سنتی میٹر ١٧ - ٦٠ ½ مربع سنتی میٹر

مشقیں، صفحہ ١٠٩

١ -

عہ	١٥°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٧٥°
ن ر	٨٫٣	٩٫٢	١١٫٣	١٦٫٠	٣٠٫٩

١٧٫٦ سنتی میٹر، ٢٥°

٢ - (١) ٨٫٩ مربع سنتی میٹر (٢) ٧٢° یا ١٠٨° (٣) علی القوائم

٣ - جب سلاخ کا میلان پٹریوں کے ساتھ مساوی ہو۔

٤ - جب ن، ا ب کا وسطی نقطہ ہو تو (١) اعظم ہے (٢) اقل ہے

٥ - اقل جبکہ اَ = ٣ ٦ - ٤٥°

٧ - ٣٫٤″ ٨ - ٩

مشقیں، صفحہ ١١٦

٢ - (١) ٦٫٠″ (٢) ١٫٢ سنتی میٹر

مشقیں، صفحہ ١٢١

١ - ٤٫٠ سنتی میٹر، ٨٫٨ سنتی میٹر

٢ - (١) ١٫٢٠″ (٢) ١٫٩٣″

تمت

فہرست اصطلاحات

Antecedent (ratio)	مقدم (نسبت)
Arithmetical progression	سلسلہ حسابیہ
Componendo	ترکیب نسبت
Consequent (ratio)	موخر (نسبت)
Cosine	جیب التمام
Cosecant	قاطع التمام
Cotangent	مماس التمام
Dividendo	تفصیل نسبت
Extreme and mean ratio	انتہائی اور وسطی تقسیم (یا نسبت)
Equiangular triangles	متساوی الزوایا مثلث
Geometrical progression	سلسلہ ہندسیہ
Harmonic conjugates	موسیقی مزدوج
Harmonic progression	سلسلہ موسیقیہ
Harmonic Section	موسیقی تقسیم
Homothetic figures	ہم وضع اشکال
Incommensurable	متباین
Inversion	تقلیب
Maxima and minima	اعظم اور اقل قیمتیں

Pencil	سل
Pole	طب
Polar	بی
Proportion	ناسب
Ptolemy's Theorem	لیموس کا مسئلہ
Range	صف
Rectangle (of different parts of a line)	طح (یا حاصل ضرب ات کے مختلف حصوں کا)
Radical axis	بادی محور
Secant	اطع
Similar figures	شابہ اشکال
Similitude (centre of)	ابہت (کا مرکز)
Sine	یب
Tangent	ماس
Transversal	اطع خط
Trigonometrical ratio	لم) مثلثی نسبت

غلط نامہ

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳	۱۱	ھا	ھاَ
۱۴	۱۸	خارحی	خارجی
۱۹	۷	ب ج . ع ف	ب ج : ع ف
۲۸	۲۳	ع	ع۱
۴۹	۹	"کے" زائد ہے	
۶۷	۱۸	گیا	گنا
۸۰	۲	ا	ا۱
۸۴	۷	نقطہ	نقطے
۸۵	۲۲	صفحہ ۱۲۱	صفحہ ۱۲۲
۱۰۲	۱۰	کم سے کم	زیادہ سے زیادہ
۱۰۳	۹	۹۳	۹۸
۱۰۵	۱۱	ن	ن۱
۱۱۱	۱۴ (تیسرا حرف)	تیسری	دوسری
۱۱۵	۲	مستقم	مستقیم
۱۲۸	۱۲	ک۲	ک۲
۱۲۹	۹	نَ جَ	ن۱ ج۱
۱۴۰	چوتھی اور پانچویں	سطر کے درمیان ہونا چاہئے	: دوقن = حونق